

ESTUDO ANALÍTICO/NUMÉRICO DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM ALETAS

Analytical/numerical study of one-dimensional heat transfer in fins

Estaner Claro ROMÃO

Faculdade de Jaguariúna

RESUMO: Este trabalho tem por objetivo apresentar um estudo numérico da transferência de calor unidimensional em aletas utilizando-se o método das diferenças finitas centrais de ordem 2. Para solução do sistema linear faz-se uso do Método Gauss-Seidel. Para a validação dos resultados, comparam-se os resultados com uma solução analítica encontrada na bibliografia aberta. O trabalho também demonstra que neste problema vários conceitos estudados em disciplinas como *Cálculo IV (Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem)*, *Termodinâmica e Transferência de Calor e Massa*, *Cálculo Numérico* entre outras podem ser utilizados para solução de problemas da Engenharia.

Palavras-chave: Transferência de Calor, Aletas, Diferenças Finitas, Diferenças Centrais, Método de Gauss-Seidel.

ABSTRACT: This paper has objective to present a numerical study of heat transfer in one-dimensional fins using the central finite difference method of order 2. For solution of the linear system makes use of Gauss-Seidel method. To validate the results, we compare the results with an analytical solution found in the open literature. The work also shows that this problem several concepts studied in subjects such as *Calculus IV (Differential Equations of Second Order Ordinary)*, *Thermodynamics and Heat and Mass Transfer*, *Numerical Calculus* and others can be used to solve problems of engineering.

Key-words: Heat Transfer, Fin, Finite Difference, Central Difference, Gauss-Seidel Method.

INTRODUÇÃO

Muitos trabalhos na bibliografia podem ser citados na solução de problemas de transferência de calor unidimensional, entre eles Arpaci (1966) e Ozisik (1980) apresentam várias soluções analíticas para o problema. Mais recentemente, soluções analíticas do problema podem ser encontrados em Bejan (1996) e Incropera e De Witt (2002).

Mais já é conhecido que muitos problemas da física não possuem soluções analíticas, graças a grande complexidade de suas equações diferenciais governantes. Vários autores já proporam soluções numéricas para problemas de

transferência de calor, tais como Gupta e Zhang (2000), Wendlander (2003) e Romão (2003, 2004, 2007).

Neste trabalho, propõe-se uma solução numérica de um caso de transferência de calor unidimensional em aletas pelo Método de Diferenças Finitas Centrais que pela sua facilidade de formulação, possibilitará uma importante comparação entre os resultados numéricos e analíticos.

DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Uma aleta plana com seção reta uniforme é construída em um material de condutividade térmica de 50W/m.K , com espessura de $w = 6\text{mm}$ e comprimento de $L = 48\text{mm}$ e é muito extensa na direção normal à página. O coeficiente de transferência de calor por convecção é de $500\text{W/m}^2.\text{K}$ e a temperatura do ar ambiente $T_\infty = 303\text{K}$. A base da aleta é mantida a $T_b = 373\text{K}$, enquanto a sua extremidade encontra-se isolada termicamente.

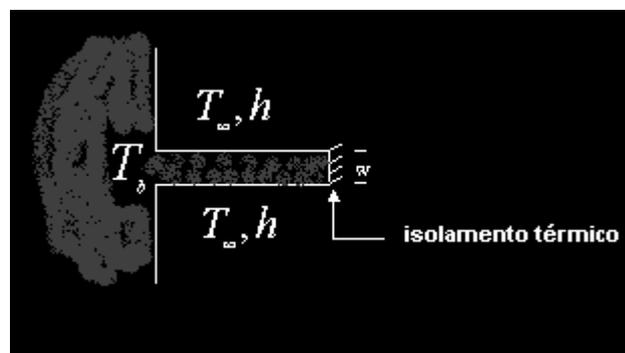


Figura 1 – Aleta plana com seção reta uniforme.

A proposta é utilizar o método de diferenças finitas centrais com um incremento espacial de 4mm e estimar a distribuição de temperaturas no interior da aleta. Será adotada a hipótese de transferência de calor unidimensional nesta aleta. Além disso, será calculado e plotado a distribuição de temperaturas na aleta para valores de $h = 10, 100, 500$ e $1000\text{W/m}^2.\text{K}$, como também será plotado um gráfico

da taxa de transferência de calor para a aleta em função de h (coeficiente de transferência de calor por convecção).

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A hipótese básica para este tipo de análise é que a temperatura na aleta é função única de x . Assim, admitimos que o calor será conduzido longitudinalmente na aleta apesar de reconhecermos que calor é transferido ao fluido pela superfície lateral exposta da aleta.

Supondo que o regime é permanente, a aplicação da **primeira lei da termodinâmica** (Wyllen et. All (1994), Potter e Scott (2006), Levenspiel (2002)) para um sistema composto pela fatia da aleta com espessura Δx resulta em

$$q_x'' A_c - q_{x+\Delta x}'' A_c - (p\Delta x)h(T - T_\infty) = 0 \quad (1)$$

onde A_c é a área da seção transversal, que é independente da posição longitudinal x , p é o perímetro da seção transversal, neste problema $p = 2.(1 + \Delta y)$, h é o coeficiente de transferência de calor por convecção.

Primeiro, vamos fatorar os dois primeiros termos do lado direito da Equação (1):

$$A_c (q_x'' - q_{x+\Delta x}'') = -A_c \frac{dq_x''}{dx} \Delta x = -A_c \frac{d}{dx} \left(-k \frac{dT}{dx} \right) \Delta x = kA_c \frac{d^2 T}{dx^2} \Delta x \quad (2)$$

Feito isso, aplica-se o resultado da Equação (2) na Equação (1) obtendo-se:

$$kA_c \frac{d^2 T}{dx^2} \Delta x - \underset{\substack{\text{Convecção} \\ \text{Lateral}}}{hp\Delta x} (T - T_\infty) = 0 \quad (3)$$

A Equação (3) trata-se de uma **Equação Diferencial Ordinária de Segundo Ordem** (Leithould (1994), Bronson e Costa (2006)).

Para solucionar numericamente a Equação (3) será utilizado o Método das Diferenças Finitas Centrais para discretizar o primeiro termo desta equação da seguinte forma (Smith (1971)):

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (4)$$

Aplicando-se a Equação (4) na Equação (3), temos:

$$T_{i-1} + T_{i+1} + \left[\frac{hp}{kA_c} (\Delta x)^2 \right] T_\infty - \left[2 + \frac{hp}{kA_c} (\Delta x)^2 \right] T_i = 0 \quad (5)$$

sendo T_i a temperatura do nó atual.

Mas este problema deve ser analisado para três casos, supondo que o problema será discretizado a partir de $n = 12$:

Caso 1. Quando $i = 1$, $T_{i-1} = T_b$, onde T_b é a temperatura na parede, logo

$$\begin{aligned} T_b + T_{i+1} + \left[\frac{hp}{kA_c} (\Delta x)^2 \right] T_\infty - \left[2 + \frac{hp}{kA_c} (\Delta x)^2 \right] T_i &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow T_{i+1} - \left[2 + \frac{hp}{kA_c} (\Delta x)^2 \right] T_i &= - \left[\frac{hp}{kA_c} (\Delta x)^2 \right] T_\infty - T_b \end{aligned}$$

Caso 2. Quando $i = 2, \dots, n-1$, vale (5).

Caso 3. Quando $i = n$, a área de convecção é igual a $A_{conv} = \frac{\Delta x}{2} \cdot p$ e T_{i+1} não existe, pois, T_i é a temperatura do último nó da malha, logo

$$T_{i-1} + \left[\frac{hp}{kA_c} \frac{(\Delta x)^2}{2} \right] T_\infty - \left[2 + \frac{hp}{kA_c} (\Delta x)^2 \right] T_i = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{i-1} - \left[2 + \frac{hp}{kA_c} (\Delta x)^2 \right] T_i = - \left[\frac{hp}{kA_c} \frac{(\Delta x)^2}{2} \right] T_\infty$$

Para finalizar-se a formulação do problema determina-se a taxa de transferência de calor para a aleta por unidade de comprimento normal à página. Sabe-se que a temperatura na base da aleta é igual a $T_b = 373\text{K}$ para $x = 0$, e

$$q_b + q_1 + q_c = 0 \Rightarrow q_b = -q_1 - q_c \Rightarrow q_b = -k \cdot \Delta y \cdot \frac{(T_1 - T_b)}{\Delta x} - h \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot (T_b - T_\infty)$$

FORMULAÇÃO ANALÍTICA

Para analisar os resultados numéricos será adotada a solução analítica a seguir (ARPACI (1966)):

Condição de contorno: $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ para $x = L$.

Distribuição de temperatura: $T(x) = T_\infty + (T_b - T_\infty) \frac{\cosh \left[\left(\frac{hp}{kA_c} \right)^{1/2} \cdot (L - x) \right]}{\cosh \left[\left(\frac{hp}{kA_c} \right)^{1/2} \cdot L \right]}$

Taxa de transferência de calor na base da aleta:

$$q_b = (T_b - T_\infty)(kA_c hp)^{1/2} \cdot \tanh\left[\left(\frac{hp}{kA_c}\right)^{1/2} \cdot L\right].$$

RESULTADOS NUMÉRICOS

Agora aplica-se um algoritmo, o Método de iteração de *Gauss-Seidel* (Barroso et. All (1987)) que visa encontrar a distribuição de temperatura com $k = 50\text{W/m.K}$ (fixo), $\Delta x = 0,004\text{m}$, $\Delta y = 0,006\text{m}$, largura = $0,048\text{m}$, com todos $T(i) = 350\text{K}$ (sendo T_i os valores de chute inicial no método de Gauss-Seidel, $i = 1, \dots, n$), e uma tolerância $\varepsilon = 0,2\text{K}$ e para os seguintes h :

1. Quando $h = 10\text{W/m}^2.\text{K}$.

$$[T] = \begin{pmatrix} 370,613657 \\ 368,358856 \\ 366,259939 \\ 364,338995 \\ 362,615579 \\ 361,106535 \\ 359,825894 \\ 358,784818 \\ 357,991581 \\ 357,451558 \\ 357,167229 \\ 357,138182 \end{pmatrix} \text{ em 38 iterações.}$$

Para este caso tem-se: $q_b = 177,5757\text{W/m}$.

2. Quando $h = 100\text{W/m}^2.\text{K}$

$$[T] = \begin{pmatrix} 367,516549 \\ 362,811263 \\ 358,839384 \\ 355,540076 \\ 352,840918 \\ 350,664209 \\ 348,933786 \\ 347,581359 \\ 346,551586 \\ 345,805411 \\ 345,321467 \\ 345,095609 \end{pmatrix} \text{ em 13 iterações.}$$

Para este caso tem-se: $q_b = 397,2588\text{W/m}$.

3. Quando $h = 500\text{W/m}^2.\text{K}$

$$[T] = \begin{pmatrix} 359,181148 \\ 348,307474 \\ 339,765896 \\ 333,072136 \\ 327,844967 \\ 323,785899 \\ 320,663236 \\ 318,299631 \\ 316,562487 \\ 315,356681 \\ 314,619237 \\ 314,315675 \end{pmatrix} \text{ em 37 iterações.}$$

Para este caso tem-se: $q_b = 966,4138\text{W/m}$.

4. Quando $h = 1000 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$

$$[T] = \begin{pmatrix} 353,867283 \\ 340,114158 \\ 330,233681 \\ 323,139985 \\ 318,051668 \\ 314,407769 \\ 311,807328 \\ 309,966033 \\ 308,685322 \\ 307,830623 \\ 307,316434 \\ 307,096636 \end{pmatrix} \text{ em 28 iterações.}$$

Para este caso tem-se: $q_b = 1294,9538 \text{ W/m}$.

Logo abaixo, encontra-se um gráfico que representa os quatro casos (valores de h):

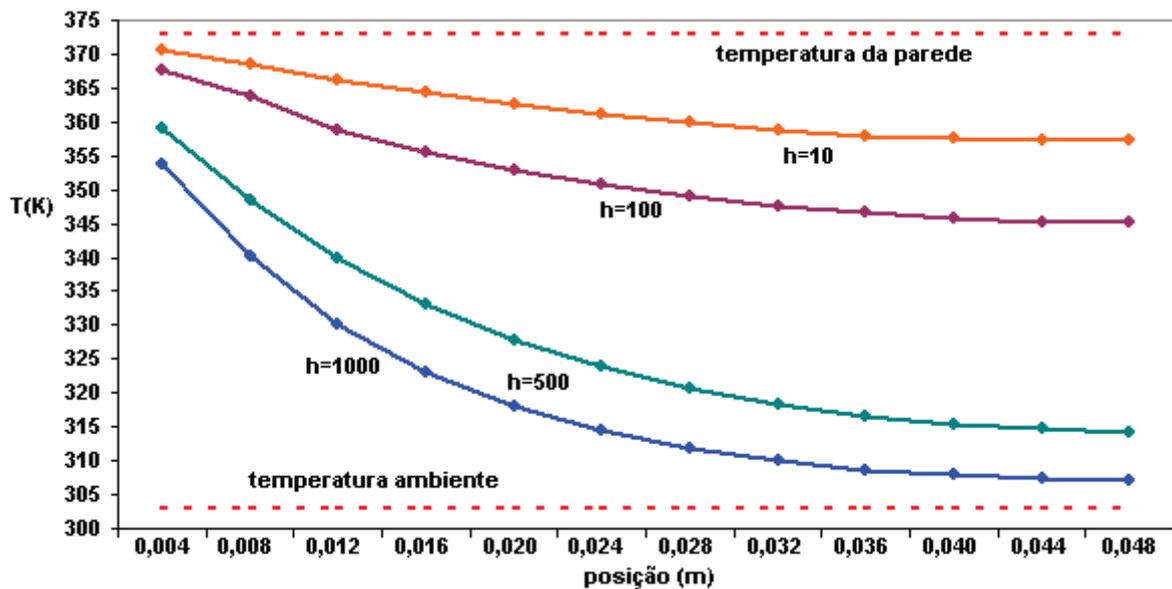


Figura 1 – Comparação da distribuição de temperatura (em K) x Posição (m) para cada valor de h (coeficiente de transferência de calor por convecção – $\text{W/m}^2 \cdot \text{K}$).

Por caráter de curiosidade, tem-se logo a seguir o gráfico que representa a relação entre a taxa de transferência de calor por convecção versus a taxa de transferência de calor da aleta na base.

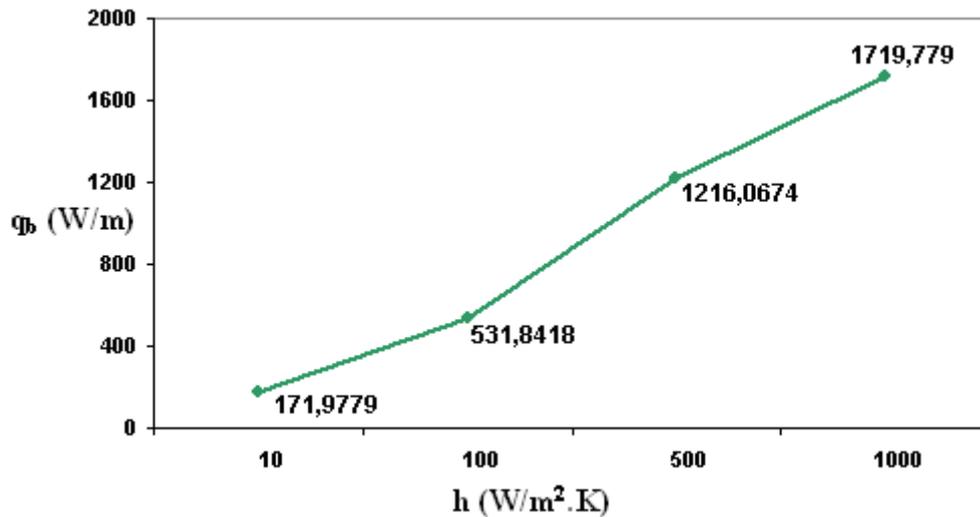


Figura 2 – Taxa de transferência de calor x Coeficiente de transferência de calor por convecção.

Comparação resultado Analítico X Numérico

Logo abaixo, descreve-se uma tabela apresentando as variações de temperaturas, em ambas as análises, para cada valor de h.

Tabela 1 – Temperaturas para resultados analítico/numéricos para $h = 10\text{W/m}^2.\text{K}$.

1.1.1 Descrição	T(K) – analítico	T(K) – numérico
T(1)	372,1798	370,6136
T(2)	371,4338	368,3588
T(3)	370,7612	366,2599
T(4)	370,1614	364,3389
T(5)	369,6336	362,6155
T(6)	369,1773	361,1065
T(7)	368,7921	359,8258
T(8)	368,4775	358,7848
T(9)	368,2331	357,9915
T(10)	368,0587	357,4515
T(11)	367,9542	357,1672
T(12)	367,9194	357,1381

Tabela 2 – Temperaturas para resultados analítico/numéricos para $h = 100\text{W/m}^2.\text{K}$.

1.1.2 Descrição	T(K) – analítico	T(K) – numérico
T(1)	367,2280	367,5165
T(2)	362,1459	362,8112
T(3)	357,6989	358,8393
T(4)	353,8395	355,5400
T(5)	350,5261	352,8409
T(6)	347,7231	350,6642
T(7)	345,4005	348,9337
T(8)	343,5333	347,5813
T(9)	342,1014	346,5515
T(10)	341,0894	345,8054
T(11)	340,4866	345,3214
T(12)	340,2863	345,0956

Tabela 3 – Temperaturas para resultados analítico/numéricos para $h = 500\text{W/m}^2.\text{K}$.

1.1.3 Descrição	T(K) – analítico	T(K) – numérico
T(1)	358,6522	359,1811
T(2)	347,3037	348,3074
T(3)	338,3429	339,7658
T(4)	331,2869	333,0721
T(5)	325,7554	327,8449
T(6)	321,4502	323,7858
T(7)	318,1393	320,6632
T(8)	315,6444	318,2996
T(9)	313,8310	316,5624
T(10)	312,6012	315,3566
T(11)	311,8889	314,6192
T(12)	311,6557	314,3156

Tabela 4 – Temperaturas para resultados analítico/numéricos para $h = 1000\text{W/m}^2.\text{K}$.

1.1.4 Descrição	T(K) – analítico	T(K) – numérico
T(1)	353,4647	353,8672
T(2)	339,3932	340,1141
T(3)	329,2620	330,2336
T(4)	321,9742	323,1399
T(5)	316,9408	318,0516
T(6)	312,9950	314,4077
T(7)	310,3314	311,8073
T(8)	308,4615	309,9660
T(9)	307,1830	308,6853
T(10)	306,3573	307,8306
T(11)	305,8952	307,3164
T(12)	305,7465	307,0966

Observação Tabela 1: A diferença máxima entre as temperaturas, para $h = 10\text{W/m}^2\cdot\text{K}$, está na casa de 3,02%, o que não é uma variação tão expressiva.

Observação Tabela 2: A diferença máxima entre as temperaturas, para $h = 100\text{W/m}^2\cdot\text{K}$, está na casa de 1,41%, o que não é uma variação tão expressiva.

Observação Tabela 3: A diferença máxima entre as temperaturas, para $h = 500\text{W/m}^2\cdot\text{K}$, está na casa de 0,87%, o que não é uma variação tão expressiva.

Observação Tabela 4: A diferença máxima entre as temperaturas, para $h = 1000\text{W/m}^2\cdot\text{K}$, está na casa de 0,46%, o que não é uma variação tão expressiva.

CONCLUSÃO

As aletas são de grande importância na engenharia, principalmente na análise de *trocadores de calor*. O método numérico aplicado neste trabalho para solucionar a transferência de calor unidimensional em aletas, apesar de simples e com uma malha considerada grosseira ($n = 12$), apresentou bons resultados, visto que as variações de temperatura comparadas com a solução exata (solução analítica) foram de no máximo 3% no pior caso, e mais, quanto maior o coeficiente de transferência de calor por convecção, menor é a diferença máxima entre o resultado numérico e o exato. Como proposta para trabalhos futuros, o autor propõe que o problema de distribuição de temperatura nas aletas seja estendido para as análises bi e tridimensionais.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ARPACI, Vedat S. **Conduction Heat Transfer**. Addison-Wesley, 1966. 550p.

BARROSO, Leônidas Conceição, BARROSO, Magali Maria de Araújo, CAMPOS FILHO, Frederico Ferreira, CARVALHO, Márcio Luiz Bunte de, MAIA, Miriam Lourenço. **Cálculo Numérico com Aplicações**. Editora Harbra, São Paulo-SP, Brasil, 1987. 367p.

BRONSON, Richard e COSTA, Gabriel. **Equações Diferenciais**. Editora Bookman, Porto Alegre-RS, Brasil, 2006. 400p.

GUPTA, M. M. and ZHANG, J.. **High accuracy multipgrid solution of the 3D convection-diffusion equation**, Applied Mathematics and Computation, 2000, **113**, 249 – 274.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica – Volume 2**. Editora Harbra, São Paulo-SP, Brasil, 1994. 1178p.

LEVENSPIEL, Octave. **Termodinâmica Amistosa para Engenheiros**. Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo-SP, Brasil, 2002. 323p.

OZISIK, M. N. **Heat Conduction**. John Wiley & Sons, New York, USA, 1980.

POTTER, Merle C. e SCOTT, Elaine P.. **Termodinâmica**. Editora Thomson, São Paulo-SP, Brasil, 2006. 365p.

ROMÃO, Estaner Claro, CAMPOS-SILVA, João Batista, APARECIDO, João Batista. **Variantes do Método de Elementos Finitos para Solução de Problemas Convectivo-Difusivos Unidimensionais**. XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Ouro Preto-MG, Brasil, 2003.

ROMÃO, Estaner Claro, CAMPOS-SILVA, João Batista, APARECIDO, João Batista. **Solução de Problemas Convectivo-Difusivos Transientes Unidimensionais pelo Método dos Elementos Finitos**. VI Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional, Itajubá-MG, Brasil, 2004.

ROMÃO, Estaner Claro, CAMPOS-SILVA, João Batista, MOURA, Luiz Felipe Mendes de. **Variantes do Método de Diferenças Finitas na Solução da Equação de Convecção-Difusão Unidimensional Permanente**. VII ERMAC, Região 3, Recife-PE, Brasil, 2007.

SMITH, G. D. **Numerical Solution of Partial Differential Equations**. Oxford Mathematical Handbooks, NewYork, 1971.

WENDLANDER, E.. **Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Águas Subterrâneas**. Notas em Matemática Aplicada, SBMAC, 2003.

WYLEN, Gordon Van, SONNTAG, Richard e BORGNAKKE, Claus. **Fundamentos da Termodinâmica Clássica**. Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo-SP, Brasil, 1994. 589p.