PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS: HISTÓRIA, CONCEITOS E APLICAÇÕES

Valéria Scomparim de LIMA (Profª Drª) – UNIMEP – UNOPEC – FAM
Acácio Reis da Silva – Alexandre Côa
Ariane Carrara – Carla Roberta Furlan
Edi Francisco Grandino – Fernando Spessotto Assarice
Gilson A. Saldibas Alonso – Márcia Cristina Tavares
Nathália Garcia Natal – Patrícia Gomes Pimenta
Paulo Rogério Rizzo – UNIMEP

INTRODUÇÃO:

Muitas pessoas pensam que a Matemática é uma disciplina em que só se trabalha com um grande número de fórmulas sem sentido e com cálculos intermináveis. Em nossas escolas o ensino das progressões é “passado” aos alunos, enquanto deveria ser construído junto com eles, nota-se também que esses conceitos não são abordados a partir da história e não tem ligação com a realidade dos mesmos.

Mas, o objetivo desse trabalho é mostrar que as coisas não são bem assim, afinal nós podemos encontrar a matemática em todo o nosso cotidiano, como as seqüências com que ocorrem alguns fatos como, por exemplo, as estações do ano, que se repetem obedecendo a um padrão, os números das placas dos veículos também são exemplos de seqüências ou progressões.

Esse trabalho tem a intenção de, com o apoio de diversas técnicas, atividades, problemas e inclusive, da parte histórica, ajudar as pessoas a compreender as progressões. Estudando inicialmente, os processos geniais que ao longo da história tantos homens encontraram para enfrentar os problemas do dia-a-dia, tendo em vista o que ela, a história, pode oferecer como contribuição ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática, verificando que esses conceitos surgiram das necessidades dos antigos povos babilônicos e egípcios, se estendendo até os dias de hoje.

Num segundo momento, estão dispostos os conceitos, fórmulas e suas demonstrações, sendo de grande valia ressaltar que elas partem de pressupostos reais, e que não são inventadas.

Por fim salientamos as aplicações dos conceitos estudados, no nosso meio, com a utilização de meios tecnológicos. Sendo assim, vamos mostrar que a Matemática não é abstrata a ponto de não se conseguir aplicar em nada, uma vez que ela pode e deve estar ao alcance de todos.

HISTÓRIA DAS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS

As progressões foram estudadas desde povos muito antigos como os babilônicos. Inicialmente, procurou-se estabelecer padrões como o da enchente do Rio Nilo, onde os egípcios de 5.000 anos atrás tiveram que observar os períodos em que ocorria a enchente do rio, pois para poderem plantar na época certa e assim garantir seus alimentos, os egípcios precisavam saber quando haveria inundação. Havia, portanto, necessidade de se conhecer o padrão desse acontecimento.

Rio Nilo

Eles observaram que o rio subia logo depois que a estrela Sírius se levantava a leste, um pouco antes do Sol. Notando que isso acontecia a cada 365 dias, os egípcios criaram um calendário solar composto de doze meses, de 30 dias cada mês e mais cinco dias de festas, dedicados aos deuses Osíris, Hórus, Seth, Ísis e Nephthys.

Tableta Babilônica

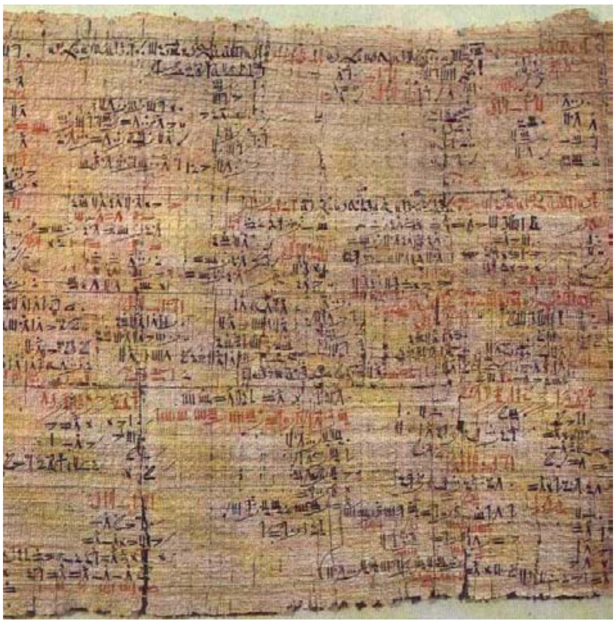
Os egípcios dividiram ainda os doze meses em três estações de quatro meses cada uma: período de semear, período de crescimento e período da colheita.

Na Mesopotâmia surgiram várias tabletas babilônicas muito interessantes, mas nenhuma delas foi tão extraordinária quanto a tableta Plimpton 322 (1900 a 1600 a.C.). Numa dessas tabletas, a progressão geométrica $1+2+2^2+...+2^9$ é somada de forma que a série de quadrados $1^2+2^2+3^2+...+10^2$ é achada.

A Matemática no Egito antigo nunca alcançou o nível obtido pela Matemática babilônica, talvez porque os egípcios tenham se mantido em semi isolamento, enquanto a babilônia era o centro das rotas de navios, e consequentemente, era um centro de troca de saberes. No entanto, devemos lembrar que os egípcios desenvolveram um papel primordial na preservação de muitos papiros que contribuíram para o nosso conhecimento atual sobre a Matemática.

Em um papiro que data de 1950 a. C. podemos encontrar alguns problemas teóricos a respeito de Progressões Aritméticas e Geométricas. Esse papiro foi encontrado em Kahun e contém o seguinte problema:

“Uma dada superfície de 100 unidades de área deve ser representada como a soma de dois quadrados cujos lados estão entre si como 1 : ¾”.



Papiro Rhind

Nesse caso temos $x^2 + y^2 = 100$ e $x = 3y / 4$. A eliminação de x fornece uma equação quadrática em y. Podemos, porém, resolver o problema por falsa posição. Para isso tomemos y = 4. Então x = 3 e $x^2 + y^2 = 25$ em vez de 100. Por conseguinte devemos fazer a correção de x e y dobrando os valores iniciais, o que dá x = 6 e y = 8.

O papiro Rhind (ou Ahmes) data aproximadamente de 1650 a. C. e nada mais é do que um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo.

Esse papiro foi adquirido no Egito pelo egiptólogo escocês A. Henry Rhind, sendo mais tarde comprado pelo Museu Britânico. O papiro Rhind foi publicado em 1927. Tem cerca de dezoito pés de comprimento por cerca de treze polegadas de altura. Porém, quando o papiro chegou ao Museu Britânico ele era menor, formado de duas partes, e faltava-lhe a porção central.

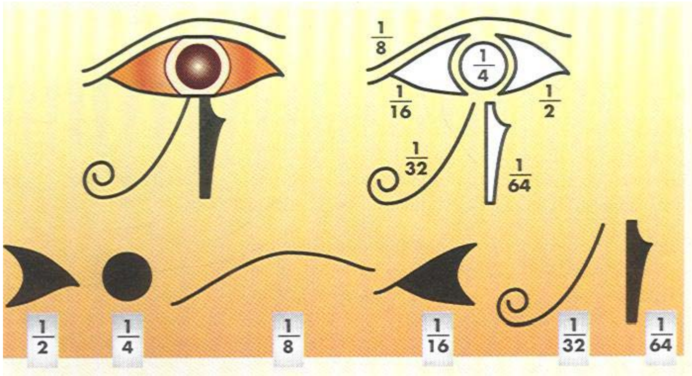
Cerca de quatro anos depois de Rhind ter adquirido seu papiro, o egiptólogo americano Edwin Smith comprou no Egito o que pensou que fosse um papiro médico. A aquisição de Smith foi doada À Sociedade Histórica de Nova York em 1932, quando os especialistas descobriram por sob uma camada fraudulenta a parte que faltava do papiro de Ahmes. A Sociedade, então, doou o rolo de pergaminho ao Museu Britânico, completando-se assim todo o trabalho de Ahmes. O papiro Rhind é uma fonte primária rica sobre a matemática egípcia antiga, deixando evidências de que sabiam fazer a soma dos termos de uma progressão aritmética.

O seguinte problema envolvendo progressões se encontra no papiro Rhind:

"*Divida 100 pães entre 5 homens de modo que as partes recebidas estejam em Progressão Aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas menores".*

Muitos dos cálculos no Papiro Rhind são evidentemente exercícios para jovens estudantes. Embora uma grande parte deles seja de natureza prática , em algumas ocasiões o escriba parece ter tido em mente enigmas ou recreações matemáticas. O problema 79, por exemplo, cita apenas "sete casa, 49 gatos, 343 ratos, 2041 espigas de trigo, 16 807 hectares". É presumível que o escriba estava tratando de um problema bem conhecido, em que uma das sete casas havia sete gatos, cada um deles come sete ratos, cada um dos quais havia comido sete espigas, cada uma delas teria produzido sete medidas de grão. O problema evidentemente não pedia uma resposta prática, que seria o numero de medidas de grãos poupadas, mas a não-prática soma dos números de casas, gatos, ratos, espigas e medidas de grão.

No Papiro de Rhind também aparece uma progressão geométrica muito interessante formada pelas frações ½, ¼, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64 do Hekat, (unidade comum do volume usada para medir quantidade de grãos). Os termos dessa seqüência são conhecidos como frações dos olhos do deus Hórus.



Os egípcios estavam aptos a somar progressões geométricas com 6 elementos, usando multiplicação por um fator comum:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$$

Os egipicios multiplicariam todos os elementos por 64 (o ultimo denominador) e encontrariam:

$$64 \cdot S = 64 \cdot \frac{1}{2} + 64 \cdot \frac{1}{4} + 64 \cdot \frac{1}{8} + 64 \cdot \frac{1}{16} + 64 \cdot \frac{1}{32} + 64 \cdot \frac{1}{64}$$

Então: $64 \cdot S = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 63$

Daí: $S = \frac{63}{64}$

Os babilônicos também utilizavam seqüências. Foram encontrados 2 problemas interessantes sobre seqüência numa tábua de Louvre, datando por volta de 300 a.C. Um deles afirma que:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 24 ... + 2^8 + 2^9 = 2^9 + 2^9 - 1$$

Pitágoras

Presume-se que se deve a Pitágoras (585 a.C. – 500 a.C.) e aos sábios gregos que viveram depois dele, a criação da Aritmética teóricos, pois os pitagóricos conheciam as progressões aritméticas, as geométricas, as harmônicas e musicais, as proporções, os quadrados de uma soma ou de uma diferença.

Ele associou o número à música e à mística, derivando-se dessa associação pitagórica os termos " média harmônica " e " progressão harmônica ". Como conseqüência de várias observações, concluíram que a relação entre a altura dos sons e a largura da corda da lira seria responsável pela existência da harmonia musical. Observaram, também, que os intervalos musicais se colocam de modo que admite expressão através de progressões aritméticas.

Pode-se dizer que suas origens remontam à Antigüidade, quando Pitágoras e seus discípulos fizeram um estudo das cordas vibrantes.

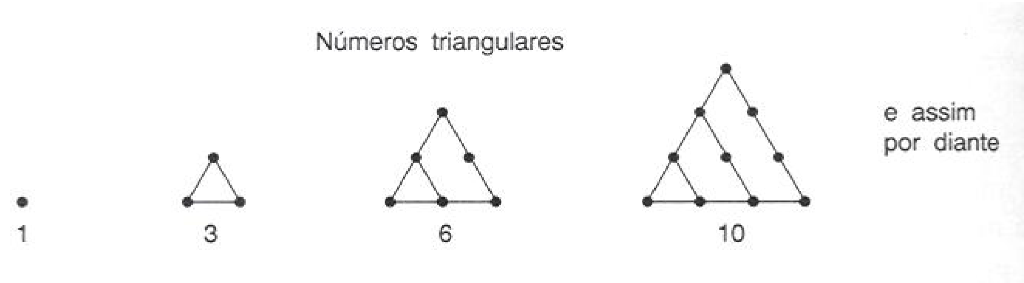
Embora certamente não tenham sido os pitagóricos os primeiros a observar que a vibração de uma corda tensionada é capaz de produzir variados sons, a eles se deve a primeira teoria sobre o relacionamento entre a musica e a matemática.

A importância desses fatos, para Pitágoras, residia em que novos tons relacionados com o original por meio de frações, isto é, estabeleciam-se relações entre os números naturais. Confirma-se, pois, ainda mais a sua teoria de que tudo no Universo estaria relacionado com os números naturais.

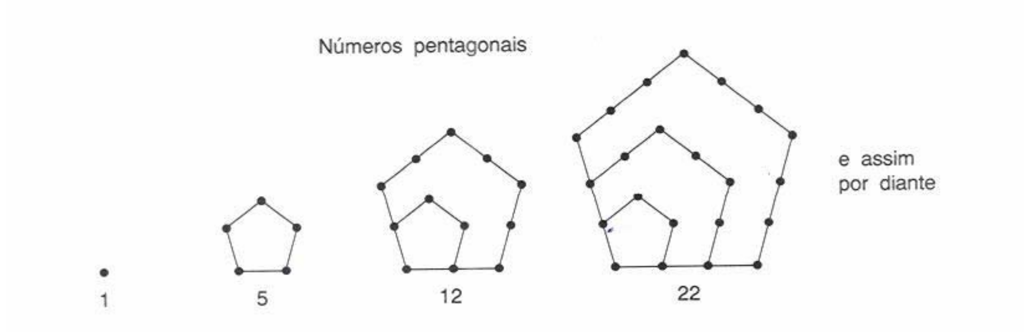
Os Números Figurados se originaram através dos membros mais antigos da escola pitagórica em aproximadamente 600 a. C.. Esses números, que expressam o número de pontos em certas configurações geométricas, representam um elo de ligação entre a geometria e a aritmética. Na figura abaixo se justifica a nomenclatura “números triangulares”:

Evidentemente o enésimo número triangular T_n é dado pela soma da Progressão Aritmética, lembrando que a soma dos termos de uma Progressão Aritmética finita é a metade do produto do número de termos pela soma dos dois termos extremos, temos:

$$T_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n.(n+1)}{2}.$$



Nesta outra figura se justifica a nomenclatura Números Pentagonais:



O enésimo número pentagonal P_n é também dado pela soma de uma Progressão Aritmética:

$$P_n = 1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) = \frac{n.(3n-1)}{2} = n + \frac{3n.(n-1)}{2} = n + 3\,T_{n-1}$$

O grego Euclides de Alexandria também teve grande êxito na história da matemática, produzindo a obra Os Elementos. A primeira edição desse trabalho surgiu em 1482 e depois desta data já surgiram mais de mil. Nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico, afinal, por mais de dois milênios esse trabalho dominou o ensino de geometria.

Página do livro Os Elementos

Os Elementos se compõem de 465 proposições distribuídas em treze livros, e é no livro VIII que encontramos as proporções contínuas e Progressões Geométricas relacionadas, de forma que, se temos uma proporção contínua a : b = b : c = c : d, então a, b, c, d formam uma Progressão Geométrica.

O problema 21 do livro IV diz: “Encontre três números em Progressão Geométrica de maneira que a diferença entre dois quaisquer deles é um quadrado”. Segundo o autor do problema a resposta é 81/7, 144/7 e 256/7.

A proposição 35 do livro IX, o último dos três sobre teoria dos números, contém uma formula para a soma de números em “progressão geométrica”, expressa em termos elegantes mas poucos usuais:

“*Se tantos números quantos quisermos estão em proporção continuada, e se subtrai do segundo e último número iguais ao primeiro, então assim como o excesso do segundo está para o primeiro, o excesso do último estará para todos os que o precedem”.*

Esse enunciado, é claro , é equivalente à fórmula:

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1}$$

que por sua vez eqüivale a:

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

Na Matemática grega depois de Euclides surgiu o seguinte problema: “Se a², b², c² estão em Progressão Aritmética, então b + c, c + a, a + b estão em progressão harmônica”.

Diofanto de Alexandria (século III d. C.) teve uma importância enorme para o desenvolvimento da álgebra e uma grande influência sobre os europeus. Ele escreveu três trabalhos, sendo o mais importante a Aritmética, que era composta por treze livros.

A Aritmética é uma abordagem analítica da teoria algébrica dos números que eleva o autor à condição de gênio em seu campo. Dos problemas que encontram-se em Aritmética, pode-se dizer que todos eles são atraentes e alguns instigantes, e deve-se ter em mente que para Diofanto, número significa número racional positivo.

O problema 7 do livro III é o seguinte: “Encontre três números em Progressão Aritmética, sabendo-se que a soma de dois quaisquer deles é um quadrado. Segundo Diofanto, a resposta é 120 ½, 840 ½, 1560 ½).Em 1202, Leonardo de Pisa (Fibonacci = filius Bonacci) matemático e comerciante da idade média, escreveu um livro denominado Liber Abacci, que chegou a nós, graças à sua segunda edição datada de 1228. Este livro contém uma grande quantidade de assuntos relacionados com a Aritmética e Álgebra da época e realizou um papel importante no desenvolvimento matemático na Europa nos séculos seguintes pois por este livro que os europeus vieram a conhecer os algarismos hindus, também denominados arábicos.

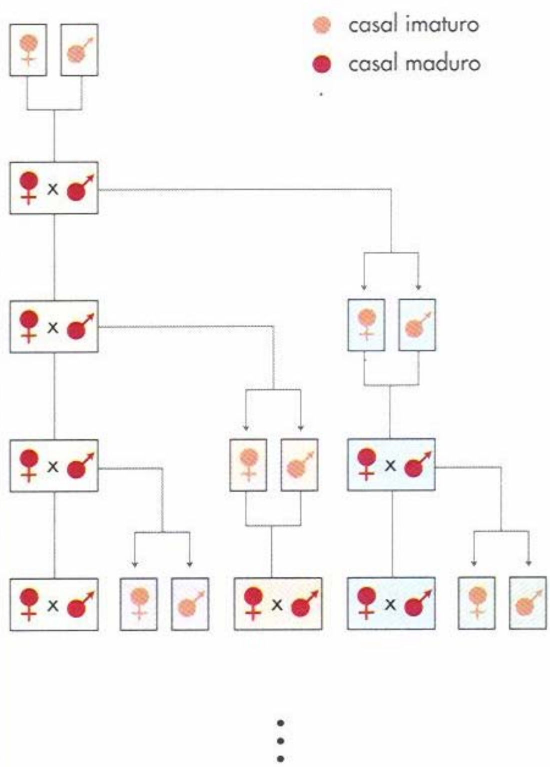
A teoria contida no livro Liber Abacci é ilustrada com muitos problemas que representam uma grande parte do livro. Um dos problemas que pode ser encontrado nas páginas 123-124 deste livro é o problema dos pares de coelhos (paria coniculorum).

Problema dos pares de coelhos: Quantos pares de coelhos podem ser gerados de um par de coelhos em um ano? Um homem tem um par de coelhos em um ambiente inteiramente fechado. Desejamos saber quantos pares de coelhos podem ser gerados deste par em um ano, se de um modo natural a cada mês ocorre a produção de um par e um par começa a produzir coelhos quando completa dois meses de vida.

Tal processo continua através dos diversos meses até completar um ano. Observa-se esta formação no gráfico com círculos, mas também pode-se perceber que

Leonardo de Pisa

Número de meses	Número de casais
início	1
1	1
2	2
3	3
4	5
⋮	⋮



a sequência numérica, conhecida como a sequência de Fibonacci, indica o número de pares ao final de cada mês:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Os hindus também foram hábeis aritméticos e deram contribuições significativas à álgebra, somando Progressões Aritméticas e Geométricas rapidamente. Os problemas de aritmética hindus comumente envolviam irracionais quadráticos, o teorema de Pitágoras, Progressões Aritméticas e permutações.

O Matemático hindu mais importante do século doze foi Bhaskara (1114 a cerca de 1185). Ele foi também o último matemático medieval importante da Índia, e sua obra representa a culminação de contribuições hindus anteriores.

O seu tratado mais conhecido, o "lilavati", recebeu o nome de sua filha, afim de consolar a infeliz moça que perdeu a oportunidade de se casar por causa da confiança de seu pai em sua predições astrológicas. Tanto o "lilavati" quanto o "vija-ganita", contém numerosos problemas sobre os tópicos favoritos dos hindus: equações liniares e quadradáticas, tanto determinadas quanto indeterninadas, simples mensuração, "progressões aritméticas e geométricas", radicais, tríadas pitagóricas e outros. Um deles cita o seguinte problema:

"Numa expedição para calcular os elefantes de seu inimigo, um rei marchou 2 yojanas no primeiro dia. Diga, calcular inteligentemente, a razão com que sua marcha diária aumentou, se ele alcançou a cidade do inimigo, a uma distância de 80 yojanas, em uma semana?

A Matemática na Europa conta a história de Michael Stifel (1486-1567) que é considerado o maior algebrista alemão do século XVI. Sua obra matemática mais conhecida é "Arithmética" integra, publicada em 1944 e dividida em três partes, números racionais, números irracionais e álgebra. Na primeira parte, ou seja, na parte dos números racionais, Stifel salienta as vantagens de se associar uma "progressão aritmética" a uma "geométrica".

Por volta de 1590, Napier revelou possuir completo conhecimento da correspondência entre progressões aritméticas e geométricas, que o levou aos logaritmos gerando em conseqüência de sua descoberta, e passando diligentemente, a construção das tabelas de logaritmos que foram publicadas vinte e quatro anos após.

Como sabemos hoje, o poder dos logaritmos como instrumentos de cálculo repousa no fato de que eles reduzem multiplicações e divisões a simples operações de adição e subtração. No entanto, na alvorada da matemática moderna, a abordagem de John Napier (1550-1617) para eliminar o fantasma das longas multiplicações e divisões difere consideravelmente das longas prostaférese (palavra grega que significa “adição e subtração”), e se baseia no fato de que, associando-se aos termos de uma progressão geométrica:

$b, b^2, b^3, b^4, ..., b^m, ..., b^n, ...$

aos da progressão aritmética:

1, 2, 3, 4, ..., m, ..., n, ...,

então o produto $b^m\ b^n = b^{m+n}$ de dois termos de primeira progressão está associado à soma m+n dos termos correspondentes da segunda progressão. Para manter os termos da “progressão geométrica” suficientemente próximo do modo que se possa usar interpolação para preencher as lacunas entre os termos da correspondência precedente, deve-se escolher o número b bem próximo de 1.

Abraham De Moivre (1667-1754) era um huguenote francês que buscou abrigo no clima politicamente mais ameno de Londres, depois da revogação do edito de Nantes em 1685. De Moivre ganhava a vida na Inglaterra como professor particular e tornou-se amigo íntimo de Issac Newton.

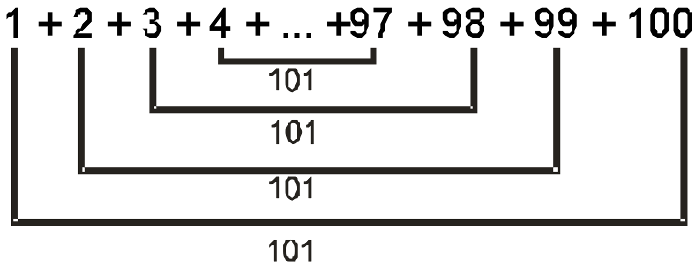
Há uma lenda interessante envolvendo a morte De Moivre. Segundo ela, De Moivre teria revelado, certa ocasião, que daí para frente teria que dormir, em cada dia, quinze minutos a mais do que no dia precedente. E quando essa “progressão aritmética” atingiu 24horas ele de fato teria morrido.

Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)

Johann Friederich Carl Gauss nasceu em Brunswick, Alemanha, em 30 de Abril de 1777. De família humilde mas com o incentivo de sua mãe, obteve brilhantismo na sua carreira.

Gauss deu sinais de ser um gênio antes dos três anos de idade. Nesta idade aprendeu a ler e a fazer cálculos aritméticos mentalmente.

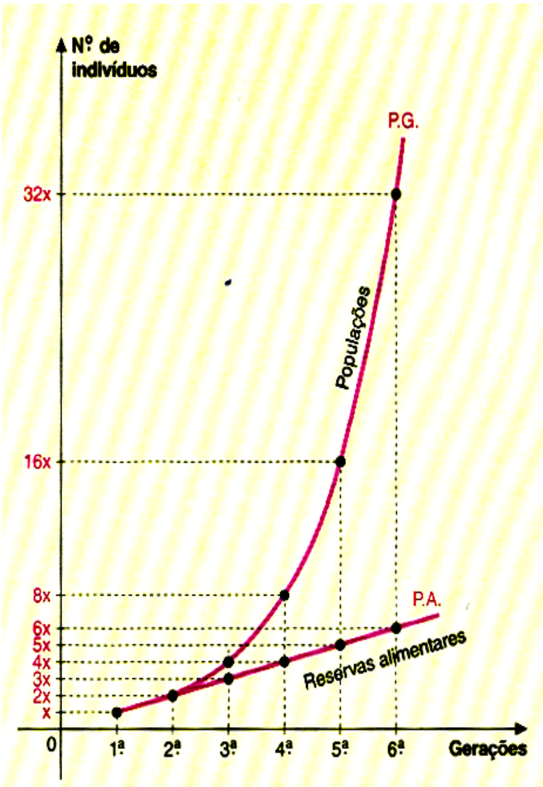
Aos dez anos de idade, durante uma aula de matemática seu professor pediu para que todos os alunos obtivessem a soma dos números de 1 a 100. Em poucos minutos Gauss apresentou o resultado correto. Até então, ninguém era capaz desse feito. Ele se baseou no fato de que a soma dos números opostos é sempre constante como mostra a figura:



Então ele multiplicou a constante (101) pelo número de termos e dividiu pela metade, chegando a fórmula da soma da progressão aritmética:

$$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Na doutrina de Darwin também podemos encontrar as Progressões Aritméticas e Geométricas. O Darwinismo – teoria estudada em Biologia, criada por Charles Robert Daewin.



Num dos quatro itens fundamentais da doutrina de Darwin, podemos encontramos uma referência às Progressões Geométricas e Aritméticas, uma influência das idéias de Thomas Malthus, famoso economista. Diz o item:

"As populações crescem em P.G. ao mesmo tempo em que as reservas alimentares para elas crescem apenas em P. A."

Em conseqüência deste item, Darwin afirmou que "devido a tal desproporção, os indivíduos empenharse-iam numa luta pela vida, ao final da qual seriam selecionados os mais fortes ou os mais aptos – a seleção natural – de alguns indivíduos em detrimento de muitos outros".

A comparação de Malthus entre o crescimento populacional e as reservas alimentares não é mais aceita atualmente, pois, apesar da maior taxa de crescimento populacional, não há uma desproporção tão grande como mostra o diagrama.

CONCEITO DE SEQÜÊNCIAS E PROGRESSÕES

SEQÜÊNCIAS

Na lista de chamada de uma classe, o nome de cada aluno está associado a um número natural não-nulo. Por exemplo:

1. Alberto Vieira de Moraes
2. Alessandra Rodrigues Fontana
3. Alex Stanley

.
.
.

30. Valdir de Souza Ramos

Quando associamos os números naturais 1, 2, 3, ... , 30 aos elementos do conjunto B, dos alunos, de modo que cada um dos números – 1, 2, 3, ..., 30 – esteja associado a um único elemento de B, estamos estabelecendo uma seqüência, em que:

- o número 1 é associado ao primeiro elemento da seqüência;
- o número 2 é associado ao segundo elemento da seqüência;
- o número 3 é associado ao terceiro elemento da seqüência;

.
.
.

- o número 30 é associado ao trigésimo elemento da seqüência.

Para representar uma seqüência, escrevemos entre parênteses os seus elementos separados um a um por vírgulas, de modo que da esquerda para a direita tenhamos: (primeiro elemento, segundo elemento, terceiro elemento, ...).

Dessa maneira, a seqüência da lista de chamada fica representada assim:

(Alberto Vieira de Moraes,
Primeiro elemento

Alessandra Rodrigues Fontana,
Segundo elemento

Alex Stanley, ...,
Terceiro elemento

Valdir de Souza Ramos)
Trigésimo elemento

Seqüência é todo conjunto cujos elementos obedecem a uma determinada ordem.

Existem também seqüências infinitas como, por exemplo, a seqüência dos números naturais pares em ordem crescente: (0, 2, 4, 6, 8,...).

Vale lembrar que:

- ✓ Cada elemento de uma seqüência também pode ser denominado de termo da seqüência.

- ✓ Em uma seqüência, o termo que ocupa a posição de número *n* é indicado pelo símbolo n_a. Isto é:
  a_1 indica o primeiro termo da seqüência;
  a_2 indica o segundo termo da seqüência;

a_3 indica o terceiro termo da seqüência;

.

.

.

a_n indica o enésimo termo da seqüência.

✓ Uma seqüência (a_1, a_2, a_3, ... , a_n, ...), pode ser representada abreviadamente por (a_n).

EXEMPLO:

Na seqüência (3, 7, 11, 15, ...) temos:

$a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_3 = 11$, $a_4 = 15$, ...

✓ Numa seqüência finita (a_1, a_2, a_3, ... , a_n, ...), os termos a_1 e a_n são chamados de extremos da seqüência. Dois termos a_i a_j são eqüidistantes dos extremos se, e somente se, o número de termos que antecedem a_1 é igual ao número de termos que sucedem a_j.

EXEMPLO:

Na seqüência (a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_{58}, a_{59}, a_{60}, a_{61}), os extremos são a_1 e a_{61}. Os termos a_4 e a_{58} são eqüidistantes dos extremos.

✓ Um termo a_m, é chamado de termo médio de uma seqüência com número ímpar de termos se, e somente se, a quantidade de termos que antecedem a_m é igual à quantidade de termos que o sucedem. No exemplo do item anterior, o termo médio é a_{31}.

LEI DE FORMAÇÃO DE UMA SEQÜÊNCIA:

Um conjunto de informações capazes de determinar todos os termos de uma seqüência e a ordem em que se apresentam é chamado de lei de formação da seqüência.

EXEMPLO:

a) Considere a seguinte seqüência:

a_n tal que $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = 2 + a_n \end{cases}$

As informações $a_1 = 5$ e $a_{n+1} = 2 + a_n$, determinam todos os termos da seqüência e a ordem em que se apresentam. Vejamos:

O primeiro termo da seqüência é 5; isto é, $a_1 = 5$;

Na igualdade $a_{n+1} = 2 + a_n$, atribuindo-se a n os valores 1, 2, 3, ..., obtemos os demais termos da seqüência, isto é:

n= 1 ➔ $a_2 = 2 + a_1 \therefore a_2 = 2 + 5 \therefore a_2 = 7$

n= 2 ➔ $a_3 = 2 + a_2 \therefore a_3 = 2 + 7 \therefore a_3 = 9$

n= 3 ➔ $a_4 = 2 + a_3 \therefore a_4 = 2 + 9 \therefore a_4 = 11$

.

.

Logo, a seqüência é (5, 7, 9, 11, ...).

PROGRESSÃO ARITMÉTICA (PA)

1. Definição:

A progressão aritmética é um tipo de seqüência bastante presente no nosso cotidiano, como mostra a situação descrita a seguir.

Quando a quantidade de água de um reservatório atinge o mínimo de $5m^3$, é aberto um registro, automaticamente, despejando-se $4m^3$ de água por hora neste reservatório, até completar sua capacidade, que é de $45m^3$. A seqüência a seguir apresenta a quantidade, em m^3, contida no reservatório, de hora em hora, a partir do instante que foi atingida a quantidade mínima:

(5,9,13,17,21,25,29,33,37,41,45)

Essa seqüência numérica é chamada de progressão aritmética (PA), porque adicionando-se uma mesma constante a cada termo, obtém-se o termo seguinte. (Neste caso a constante adicionada é o 4).

Progressão aritmética é toda seqüência numérica em cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo precedente (anterior) com uma constante r. O número r é chamado de razão da progressão aritmética.

EXEMPLOS:

a) A seqüência (5,9,13,17,21,25,29,33,37,41,45) é uma PA finita de razão 4.

b) (10,8,6,4,2,0,-2,-4,...) é uma PA infinita de r=-2.

c) (5,5,5,5,...) é uma PA infinita de razão r=0.

2. Classificação das progressões aritméticas:

2.1 Crescente

Uma PA é crescente quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o termo que o antecede. Para que isso aconteça, é necessário e suficiente que a razão seja positiva.

EXEMPLO:

(7,11,15,19,...) é uma PA crescente . Note que a razão é positiva, r= 4.

2.2 Decrescente

Uma PA é decrescente, quando em cada termo, a partir do segundo, é menor que o termo que o antecedente. Para que isso aconteça, é necessário e suficiente que a razão seja negativa.

EXEMPLO:

(50,40,30,20,...) é uma PA decrescente. Note que sua razão é negativa, r= -10.

2.3 Constante

Uma PA é constante quando todos os seus termos são iguais. Para que isso aconteça, é necessário e suficiente que a razão seja igual a zero.

EXEMPLO:

A PA (4/3, 4/3, 4/3,...) é constante. Note que sua razão é igual a zero, r= 0.

3. Termo geral de uma Progressão aritmética

Voltando à situação descrita na introdução, vimos que a PA:

(5,9,13,17,21,25,29,33,37,41,45)

Apresenta a quantidade de água, em m^3, contida no reservatório, de hora em hora, a partir do instante em que foi atingida a quantidade mínima.

Observe que podemos calcular a quantidade de água contida no reservatório, no final de cada hora, adicionando à quantidade mínima ($5m^3$) o produto do número de horas pela vazão do registro ($4m^3/h$). Por exemplo, para calcular a quantidade de metros cúbicos de água contida no reservatório, 6 horas após a abertura do registro, basta efetuar:

$$5+6.4$$

Note que o resultado é o 7º termo da PA e, que

$a_1= 5$ e $r = 4$, isto é

$$a_7= a_1+ 6r$$

Raciocinando de modo análogo, temos:

$a_8 = a_1 + 7r$; $a_9 = a_1 + 8r$, etc.

Essa idéia pode ser generalizada para qualquer PA, como veremos a seguir.

Consideremos a PA de razão r:

$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n, ...)$

Qualquer termo dessa P.A. pode ser representada em função de a_1 r , observe:

$(a_1 + 0r; a_1 + 1r, a_1 + 2r, a_1 + 3r, ...)$,

Isto quer dizer, que qualquer termo na é igual à soma de a_1 com o produto (n-1)r, ou seja, a fórmula do termo geral da PA pode ser expressa:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

4. Termos eqüidistantes dos extremos de uma PA

Numa PA finita, a soma de dois termos eqüidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

5. Soma dos n primeiros termos de uma PA

Em uma pequena escola do principado de Braunschweig, Alemanha, em 1785, o professor Buttner propôs a seus alunos que somassem os números naturais de 1 a 100. Apenas três minutos depois, um gurizote de oito anos aproximou-se da mesa do professor e, mostrando-lhe sua prancheta, proclamou: “Aí está”. O professor, assombrado, constatou que o resultado estava correto.

Aquele menino viria a ser um dos maiores matemáticos de todos os tempos: Karl Friedrich Gauss (1777-1855). O cálculo efetuado foi simples e elegante: ele percebeu que a soma do primeiro número, 1, com o último, 100, é igual a 101; a soma do segundo número, 2, com o penúltimo, 99, é igual a 101; também a soma do terceiro número, 3, com o antepenúltimo, 98, é igual a 101;

concluindo assim que a soma de dois termos eqüidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

TEOREMA:

A soma S_n dos n primeiros termos da PA ($a_{1,}$ a_2, $a_{3,...}a_n$..) é dada por:

$$Sn = \frac{(a1 + an).n}{2}$$

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG)

1. Definição:

Progressão geométrica é toda seqüência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo precedente (anterior) por uma constante q. O número q é chamado de razão da progressão geométrica.

Várias situações do nosso cotidiano ou do universo científico relacionam grandezas que crescem ou decrescem pelo produto por uma constante. O estudo dessas grandezas exige o conhecimento de um tipo especial de seqüência chamada de progressão geométrica. A seguir é apresentada uma dessas situações.

Um capital de R$ 10.000,00 é aplicado durante cinco anos à taxa de juro composto de 20% ao ano. A seguir apresenta os montantes, em reais, ano a ano, a partir do início da aplicação:

(10.000, 12.000,14.400,17.280,20.736)

Essa seqüência é numérica é chamada de progressão geométrica (PG), porque, multiplicando-se cada termo por uma mesma constante, obtém-se o termo seguinte. (Nesse caso, multiplicou-se cada termo constante 1,2.)

EXEMPLOS:

a) (3,6,12,24,48,96) é uma PG finita de razão q= 2.

b) (1, ½, ¼, 1/8, 1/16,...) é uma PG infinita de razão q= ½.

c) (2, -6, 18, -54, 162,...) é uma PG infinita de razão q= -3.

d) (5, 0, 0, 0,...) é uma PG infinita de razão q= 0.

e) (0, 0, 0,...) é uma PG infinita de razão indeterminada.

2. Classificação das progressões geométricas.

2.1 Crescente

Uma PG é crescente quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o termo que antecede. Para que isso aconteça, é necessário e suficiente que $a_1>0$ e $q>1$, ou $a_1<0$ e $0<q<1$.

EXEMPLOS:

a) (4, 8, 16, 32,...) é uma PG crescente de razão q=2.

b) (-4, -2, -1, -1/2,...) é uma PG crescente de razão q=1/2.

2.2 Decrescente

Uma PG é decrescente quando cada termo, a partir do segundo, é menor que o termo que o antecede. Para que isso aconteça, é necessário e suficiente que $a_1>0$ e $0<q<1$, ou $a_1<0$ e $q>1$.

EXEMPLOS:

a) (8, 4, 2, 1, ½, ...,) é uma PG decrescente de razão q= ½.

b) (-1, -2, -4, -8, ...) é uma PG decrescente de razão q= 2.

2.3 Constante

Uma PG é constante quando os seus termos são iguais. Para que isso aconteça, é necessário e suficiente que sua razão seja 1 ou que todos os seus termos sejam nulos.

EXEMPLOS:

a) (8, 8, 8, ...) é uma PG constante de razão q= 1.

b) (0, 0, 0, 0,....) é uma PG constante de razão indeterminada.

2.4 Oscilante

Uma PG é oscilante quando todos os seus termos são diferentes de zero e dois termos consecutivos quaisquer têm sinais opostos. Para que isso aconteça, é necessário e suficiente que $a_1 \neq 0$ e $q < 0$.

EXEMPLOS:

a) (3, -6, 12, -24, 48, -96,...) PG oscilante de razão q= -2.

b) (-1, ½, -1/4, 1/8, -1/16,...) é uma PG oscilante de razão q= -1/2.

2.5 Quase nula

Uma PG é quase nula quando o primeiro termo é diferente de zero e todos os demais são iguais a zero. Para que isso aconteça, é necessário e suficiente que $a_1 \neq 0$ e $q = 0$.

EXEMPLO:

(8, 0, 0, 0,....) é uma PG quase nula.

2.6 Propriedade

Uma seqüência de três termos, em que o primeiro é diferente de zero, é a PG se, somente se, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos outros dois, isto é, sendo a≠ 0, temos:

$$(a, b, c) \text{ é PG } \rightarrow b^2 = a.c.$$

3. Soma dos n primeiros termos de uma PG

A taxa de crescimento anual na produção de soja de um estado brasileiro é de 5%. Para estimar o total de soja produzida nesse estado e trinta anos, de 2001 a 2030, o secretário da agricultura supôs que essa taxa permaneça constante a partir da produção de 2001, que foi 4 milhões de toneladas. Essa estimativa é a soma dos termos da seguinte PG de trinta termos e razão 1,05:

$(4, 4{,}2; 4{,}41; \ldots 4.\ (1{,}05)^{27}; 4.\ (1{,}05)^{28}; 4.\ (1{,}05)^{29})$ em que cada termo representa a quantidade de soja produzida anualmente, em milhões de toneladas.

Mesmo dispondo de uma calculadora, o secretário não somou os termos um a um, pois o trabalho seria longo e tedioso. Ele usou a fórmula a seguir, que calcula a soma dos n primeiros termos de uma PG não- constante, com os primeiro termo a_1 e a razão q:

$$Sn = \frac{a_1.(1-q^n)}{1-q}$$

Generalizando, veremos a seguir, que existe o limite da soma dos infinitos termos de qualquer PG cuja razão q obedeça à condição: $-1 < q < 1$.

O limite S_n da soma dos infinitos termos de uma PG (a_1, a_2, a_3,...), de razão q, $-1 < q < 1$, é dado por:

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q}$$

Notas

- Existe o limite da soma dos infinitos termos de uma PG de razão q, se, e somente se, -1< q< 1.

- O limite da soma dos infinitos termos de uma PG é chamado, simplesmente, de soma dos infinitos termos da PG.

APLICAÇÕES PRÁTICAS DAS PROGRESSÕES

As progressões aritméticas e geométricas estudadas nos capítulos I e II são modelos matemáticos cujas aplicações nos ajudaram a entender muitos fenômenos em diversos ramos da atividade humana. Em resumo, as progressões também são conceitos, cujo ensino pode ser diferenciado.

Os exemplos a seguir nos revelam, onde podemos encontrar as progressões aritméticas e geométricas:

EXEMPLO I:

Fazendo um teste com um automóvel nacional, verificamos que o mesmo acelera de 0 a 60 Km/h em 6 segundos. Admitindo que a aceleração do automóvel seja constante, concluímos que, após a partida, a sua velocidade aumenta de 10 km/h a cada segundo. A tabela mostra a velocidade associada ao tempo.

Tempo (s)	Velocidade (Km/h)
0	0
1	10
2	20

3	30
4	40
5	50
6	60

Os números que representam as velocidades do automóvel formam a seguinte seqüência ou sucessão (0,10,20,30,40,50,60). Sucessões como essa, cuja diferença entre qualquer termo e o seu antecessor é constante, são chamadas de progressões aritméticas, e além do mais caracterizada como crescente.

Aproveitando o mesmo exemplo, podemos perceber que após ter atingido os 60 Km/h, o automóvel terá de frenar, assim reduzindo sua velocidade até 0 Km/h em 6 segundos. Admitindo que a desaceleração do mesmo seja constante, a velocidade caíra 10 Km/h em cada segundo. Dessa forma teremos a seguinte tabela:

Tempo (s)	Velocidade (Km/h)
0	60
1	50
2	40
3	30
4	20
5	10
6	0

Dessa forma, os números que representam as velocidades do automóvel (60,50,40,30,20,10,0) formam, nesta ordem, uma progressão aritmética decrescente.

EXEMPLO II:

Um atleta em fase de treinamento, prepara-se pra voltar á prática esportiva de ciclismo depois de um tempo que ficou afastado. No entanto ele mesmo sabe que não pode pedalar a mesma quantia de quilômetros como antigamente, ou seja, ele tem que realizar um treinamento mantendo um crescimento constante. Vejamos na tabela abaixo como ele planejou o treinamento:

PERÍODO	DISTÂNCIA
1º dia	5 Km
2º dia	10 Km
3º dia	13 Km
4º dia	16 Km
5º dia	19 Km
...	...

Segundo seu planejamento ele deseja um aumento constante a partir do segundo dia. Sabendo que o mesmo atleta pretende fazer o treinamento num período de 12 dias, vejamos como ele pode obter a quilometragem final de seu treinamento:

POSSÍVEL RESOLUÇÃO:

As distâncias percorridas diariamente pelo atleta formam a seqüência (5,10,13,16,19,...) e, a partir do 2º termo, a seqüência é uma progressão aritmética. A soma das distâncias percorridas, S_t, é dada por $S_t=5+S_{11}$; S_{11} é a soma dos termos da progressão aritmética, em que $a_1=10$, r=3 e n=11.

Temos:

$S_{11} = \underline{(a_1+a_{11})\ 11}$

$$2$$

$\Rightarrow S_{11} = \frac{(10+a_{11})\,11}{2}$

Como $a_{11} = a_1 + 10\,r \Rightarrow a_{11} = 10 + 10 \,.\, 3 \Rightarrow a_{11} = 40$; então:

$S_{11} = \frac{(10 + 40)\,11}{2}$

$\Rightarrow S_{11} = 275$

Portanto, $S_t = 5+275 \Rightarrow S_t = 280$

Ou seja, o atleta irá percorrer 280 Km nos 12 dias de treinamento.

EXEMPLO III:

A companhia que administra uma rodovia quer colocar radares eletrônicos de controle de velocidade ao longo de 500 quilômetros. Dessa forma, segue a tabela com os seguintes dados:

Radar	Quilômetro
primeiro	10
segundo	50
terceiro	90

E assim sucessivamente formando uma progressão aritmética. Sendo assim, a companhia quer saber: Quantos radares eletrônicos serão colocados no trecho planejado?

POSSÍVEL RESOLUÇÃO:

Se dermos uma olhada na tabela acima podemos nos deparar que de um radar para o outro os quilômetros aumentam de 40 em 40, então poderíamos fazer a seguinte conta:

2º radar → 10+40 = 50

3º radar → 50+40 = 90

4º radar → 90+40 = 130

5º radar → 130+40 = 170

6º radar → 170+40 = 210

7º radar → 210+40 = 250

8º radar → 250+40 = 290

9º radar → 290+40 = 330

10º radar → 330+40 = 370

11º radar → 370+40 = 410

12º radar → 410+40 = 450

13º radar → 450+40 = 490 sendo assim, chegaríamos a conclusão de que no quilômetro 490 seria colocado o décimo terceiro radar, então chegaríamos na resposta de 13 radares no trecho planejado da rodovia.

Mas, há uma forma muito mais simples e objetiva de se chegar na resposta que vamos apresentar pra vocês que seria o método pela fórmula:

RESOLUÇÃO PELA FÓRMULA:

$a_1 = 10$

$r = 40$

n = número de radares e $n \in \mathbb{N}$

Supondo que $a_n = 500$, temos:

$a_n = a_1 + (n - 1).r$

$500 = 10 + (n - 1).40$

$500 = 10 + 40n - 40$

$530 = 40n$

$n = \frac{530}{40}$

n = 13,25

Como n $\in$ IN, n = 13

Logo, a companhia deverá colocar 13 radares.

Se quisermos saber em qual quilômetro será colocado o décimo terceiro radar, voltamos a fórmula e substituímos o n por 13:

$a_n = a_1 + (n - 1).r$

$a_n = 10 + (13 - 1).40$

$a_n = 10 + 480$

$a_n = 490$, será colocado no quilômetro 490.

EXEMPLO IV:

Num treino de basquete pode se observar que um garoto fez 1 cesta no 1º dia, 2 cestas no 2º dia, 4 cestas no 3º dia, e assim sucessivamente. Quantas cestas este garoto fará no 10º dia?

POSSÍVEL RESOLUÇÃO:

PG (1, 2, 4, ..., a_n) → Progressão Finita

temos: $a_1 = 1$

$q = 2$

$n = 10$

Para determinar a_{10}, fazemos:

Fórmula do termo geral: $a_n=a_1.q^{n-1}$

então: $a_{10} = a_1.q^9$

$a_{10} = 1.2^9$

$a_{10} = 512$

Assim, podemos concluir que este garoto fará 512 cestas no 10º dia de treino.

EXEMPLO V:

Num jogo de basquete, pudemos observar que com 10 minutos de jogo o time A tinha 4 pontos marcados no placar, com 20 min de jogo o mesmo time tinha 8 pontos, com 30 min tinha 16 pontos e assim sucessivamente. Ao término do jogo, que tem duração de 60 min, qual será a pontuação do time A?

POSSÍVEL RESOLUÇÃO:

PG (4, 8, 16, ..., an)→ Progressão Finita

Temos: $a_1 = 4$

$q = 2$

$n = 6$

Para determinar a_6, fazemos:

Fórmula do termo geral: $a_n=a_1.q^{n-1}$

Então: $a_6 = a_1.a_5$

$a_6 = 4.25$

$a_6 = 4.32$

$a_6 = 128$

Assim, podemos concluir que o time A terá 128 pontos ao término do jogo.

EXEMPLO VI:

Em uma experiência de laboratório, um frasco recebe, no primeiro dia do mês, 3 gotas de um determinado líquido; no segundo dia recebe 9 gotas; no terceiro dia recebe 27 gotas; e assim por diante. No dia em que recebeu 2187 gotas ficou completamente cheio. Em que dia do mês isso aconteceu?

POSSÍVEL RESOLUÇÃO:

PG (3, 9, 27, ..., 2187) ➔ Progressão Finita

Temos: $a_1=3$

$q=3$

$a_n=2187$

Agora, temos que calcular n, que é correspondente ao número do dia do mês que acontece o fato:

Fórmula do termo geral: $a_n=a_1.q^{n-1}$

Então: $2187=3.3^{n-1}$

$3^{n-1}=\frac{2187}{3}$

$3^{n-1}=729$

$3n-1=36$

$n-1=6$

$n= 6+1$

$n=7$

Assim, podemos concluir que no 7º dia o frasco recebeu 2187 gotas e ficou totalmente cheio.

EXEMPLO VII:

Uma pessoa aposta na loteria durante cinco semanas, de tal forma que, em cada semana, o valor da aposta é o dobro do valor da aposta da semana anterior. Se o valor da aposta da 1ª semana é R$60,00, qual o valor total apostado após as cinco semanas?

POSSÍVEL RESOLUÇÃO:

PG(60,...,an)→ Progressão Finita

Temos: $a_1=60$
$q=2$
$n=5$

Como queremos o valor TOTAL apostado, usamos a fórmula da soma de n termos de uma
PG finita:

$$S_n= \frac{a_1.(q^n-1)}{q-1}$$

$$S_5= \frac{60.(25-1)}{2-1} \rightarrow S_5= 60.31 \rightarrow S_5 = 1860$$

Assim, concluímos que esta pessoa gastou R$1860,00 em cinco semanas de aposta.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pode-se observar que mais uma vez a Matemática como um todo, se mostra importante na medida em que a sociedade necessita e se utiliza dos conhecimentos dessa área, que por sua vez são essenciais para a inserção das pessoas como cidadãos no mundo do trabalho, da cultura e das relações sociais.

Vê-se que os povos egípcios e os babilônicos se utilizavam desses conceitos para conseguir aquilo que necessitavam. Em um caso particular dos egípcios, eles procuravam estabelecer padrões para saberem quando haveria inundação e assim garantir seus alimentos. Com certeza é de grande valia a inserção dos contextos históricos em sala de aula, pois o discente passa a ver a matemática como uma criação humana, enquanto o docente cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento.

Em relação aos conceitos, houve a oportunidade de se ver as demonstrações das mesmas, onde por si própria nos passa um melhor entendimento sobre a validade das fórmulas.

No que diz respeito às aplicações dos conceitos em nosso cotidiano, pudemos perceber a riqueza dos conceitos de progressões. Ao mesmo tempo, pudemos ver a flexibilidade desses conceitos em diferentes situações e assim validando uma das características principais para que se assegure a aprendizagem: o real interesse do discente em aprender algo, é quando aquilo serve ou servirá para alguma situação que ele necessitará. Se pudermos assim fazer com que o discente construa melhor os conceitos, então vale a pena disponibilizar de um tempo a mais para prepararmos algumas aplicações.

Portanto, se faz necessário que os professores utilizem informações desta natureza durante seu processo de ensino, para enfim satisfazer a necessidade de uso imediato e prático dos conteúdos escolares, facilitando a motivação do aluno e sua aprendizagem.

BIBLIOGRAFIA:

BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática.* São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

CARVALHO, Silva, COSTA, Maria Cecília. *Padrões Numéricos e Seqüências*. São Paulo: Moderna, 1997.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Esitor da UNICAMP, 1995.

História da Álgebra. http://users.hotlink.com.br/marielli/matematica/histomatica/histoalg.html. Acesso em 15/03/2004

KIYUKAWA, Rokusaburo, SMOLE, Kátia Cristina Stocco. *Matemática*. 2 ed.. São Paulo: Saraiva, 1999.

Malha Atlântica. http://www.malhatlantica.pt/mathis/index.html. Acesso em 15/03/2004

Matemática Essencial. http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/. Acesso em 15/03/2004

PAIVA, Manoel. *Matemática*. São Paulo: Moderna, 2003.

SANTOS, Carlos A. M. dos *et al*. *Matemática*. São Paulo: Ática, 2003.