UMA CONTRIBUIÇÃO À UNIFICAÇÃO DA TEORIA QUÂNTICA COM A TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL

A Contribution to the Unification of quantum Theory and the Special Relativity

Ricardo Ferreira ARANTES
Universidade Paulista

Rodrigo Gontijo de ALVARENGA
Faculdade de Jaguariúna

Resumo: Este estudo teórico é uma contribuição aos esforços de unificação da teoria Quântica com a Relatividade Especial. Partindo do estudo do movimento unidimensional de uma partícula livre e das suas funções de onda, após modificações matemáticas, quatro novas funções foram identificadas. Essas, além de solucionarem a equação de Schroedinger apresentaram produtos relacionados com a correção relativística de Einstein. Isto permitiu convergir em uma equação que unifica as duas citadas teorias.

Palavras-chave: Quântica, Relatividade, Unificação

Abstract: This theorical study is a contribution to the efforts' unification of Quantum and Special Relativity theories. Starting of study of the unidimentional movement of a free particle and their wave functions, and after mathematical modifications, four new functions were identificated. These are Schroedinger solutions and shows products relations with the Einstein relativistic correction. This allows to converge in a new equation that unify both theories.

Keywords: Quantum, Relativity, Unification

INTRODUÇÃO

Considerações iniciais sobre a Quântica

Sabemos da Teoria Quântica que as possíveis soluções da equação de Schroedinger são do tipo funções de onda complexo-conjugadas ψ e ψ^* quaisquer, desde que satisfaçam, entre outras, às seguintes condições e restrições:

a) O tratamento dado às ondas-partículas, ao menos usando-se a equação de De Broglie ou a de Schroedinger, não é relativístico[1];
b) A Energia Potencial[2], V ou simplesmente Potencial V(x,t) envolvido no problema é uma grandeza física escalar e real. E no caso de uma partícula livre, o potencial V deverá ser constante;
c) A função $\Psi(x,t)$ que satisfaz a equação de Schroedinger pode ser obtida de combinações lineares de diferentes outras soluções;
d) O produto $\Psi\,\Psi^*$ é igual a *densidade de probabilidade* P(x,t), sendo esta última caracterizada por um número positivo e real[3].

Estas condições são usualmente empregadas na dedução da Equação de Schroedinger[4]:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}.\frac{\partial^2\Psi\,(x,t)}{\partial x^2}+V(x,t)\cdot\Psi(x,t)-i\hbar\frac{\partial\Psi\,(x,t)}{\partial t}=0 \qquad (1)$$

cujo estudo no caso particular de funções de ondas associadas a partículas livres[5], leva a soluções do tipo combinações lineares de cossenóides, tais como:

$$\Psi=\cos(kx-wt)+i.sen(kx-wt) \qquad (2)$$

$$\Psi^*=\cos(kx-wt)-i.sen(kx-wt) \qquad (3)$$

Sendo:

---

[1] Devem ser consistentes com os postulados de De Broglie-Einstein: $\lambda = h/p$ e $\nu = E/h$ onde: λ é o comprimento de onda associada a partícula, *p* é a quantidade de movimento da partícula, ν é a freqüência da onda , *E* é a energia e *h* a constante de Planck.

[2] Satisfaz a relação $E=\frac{p^2}{2m}+V$, onde m é a massa da partícula associada a onda.

[3] Postulado enunciado pela primeira vez em 1926 por Max Born, segundo Eisberg & Resnick.

[4] SCHROEDINGER (1926) e EISBERG & RESNICK (1988, P174 a P179).

[5] Por simplicidade didática e matemática, generaliza-se o uso da equação de Schroedinger para os casos de partículas *não livres*, sem maiores deduções e através de postulados, baseados em experimentações, conforme indicado em Eisberg & Resnick.

k : *vetor de onda* (para 2 ou mais dimensões) é um valor associado ao *número de onda angular* e sua unidade é o inverso do comprimento (m^{-1}).

w : a *freqüência angular* com unidade de radianos por segundo (*rad/s*).

m : a massa da partícula associada a função de onda.

$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$: uma relação com a constante de Planck (h).

Note que o "ângulo" em radianos corresponde a fase de uma onda progressiva ou regressiva, conforme o sinal negativo (-) ou positivo (+) usado em:

$\theta = (kx - wt)$ (progressiva)

$\theta = (kx + wt)$ (regressiva ou retrógrada) (4)

A combinação linear das ondas ocorre de forma construtiva e/ou destrutiva, conforme a interferência das ondas progressivas ou regressivas a partir de um mesmo referencial de observação.

Demonstra-se facilmente pelo tipo de equações em (2) e (3) das soluções complexo-conjugadas que o produto entre elas é sempre um valor unitário, independente do "ângulo" ou "fase" da onda:

$$\Psi\ \Psi^* = \cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta = 1 \qquad (5)$$

Entretanto, a *densidade de probabilidade*, segundo Born, ao ser integrada ao longo de uma direção ***x*** qualquer, independentemente do tipo de função de onda usada, deve resultar em um valor *unitário* para que exista uma partícula associada à essa função de onda, ou seja:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x,t)\cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi\ \Psi^* \cdot dx = 1 \qquad (6)$$

Por outro lado, se existir a partícula associada, então a probabilidade de localizá-la entre as coordenadas ***x*** e ***x+dx*** num dado instante ***t*** poderá ser obtida pelo produto da *densidade de probabilidade* pelo intervalo de espaço ***dx*** :

$$P(x,t)\cdot dx = \Psi\ \Psi^{*}\cdot dx \tag{7}$$

E similar à equação (6), a integração da equação (7) no intervalo **dx** também deverá ser unitária, ou seja:

$$\int_{x}^{x+dx} P(x,t)\cdot dx = \int_{x}^{x+dx} \Psi\ \Psi^{*}\cdot dx = 1 \tag{8}$$

Assim, pela equação (5) e (8) conclui-se que as funções de onda complexo-conjugadas conduzem à uma *normalização* do espaço-tempo em que ocorre a observação ou medição da relação dual onda-partícula, de forma a preservar o princípio da incerteza de Heisenberg e a correspondência entre a mecânica quântica e a clássica. Comparando as equações (5) e (7) podemos definir a *Relação de Probabilidade Unitária* ou *Normalizada* dada por:

$$P(x,t) = \Psi\ \Psi^{*} = 1 \tag{9}$$

CONSIDERAÇÕES INICIAIS SOBRE A RELATIVIDADE

A Física teórica do século XIX era fundamentada nas equações de Newton, de Maxwell e nas transformações de Galileu, sendo explicado que os fenômenos mecânicos eram equivalentes entre sistemas de referências com movimentos relativos e uniformes uns aos outros. Entretanto, quando se falava em fenômenos eletromagnéticos, eles não eram equivalentes e havia um único referencial, o éter, no qual a velocidade da luz era constante e com valor em módulo igual a *c* (3.10^{+8} m/s). Em 1887 a experiência de Michelson-Morley descartou a possibilidade de um éter como sistema de referência privilegiado ou especial, e evidenciou o que atualmente é aceito: *a velocidade da luz no vácuo independe do movimento do observador e do movimento da fonte.*[6]

Porém, em 1905, Albert Einstein revolucionou a Física através da teoria da Relatividade na qual definitivamente abandonava-se o conceito de éter e aceitava-se a velocidade da luz como constante e igual a *c*. Novos conceitos foram acrescentados: o de *simultaneidade*[7], o de *sincronicidade*[8] e *não-localidades*[9] a eventos físicos medidos em sistemas referenciais distintos.

Experiências imaginárias[10] idealizadas por Einstein foram utilizadas para exemplificar a nova teoria e as definições sobre *tempo-próprio*, *comprimento-próprio* que conduziam às novas percepções de *contração* e *dilatação* do espaço-tempo quando medidas por observadores situados em dois sistemas de referência: um móvel (S'x'y'z') em relação a outro fixo (Sxyz). Os efeitos de contração do espaço, também conhecido como *contração de Lorentz*[11], e de dilatação do tempo formavam a base das equações de transformação de variáveis espaço-tempo da relatividade de Einstein:

---

[6] EISBERG & RESNICK (PP834).

[7] Eventos físicos que acontecem em espaço-tempo distintos são simultâneos se compartilharem de alguma característica de mesma sincronicidade.

[8] Conceito geralmente associado a um tipo de sinal-luminoso que é observado ao mesmo tempo no ponto médio geométrico de dois observadores espacialmente separados, ou seja, situados em suas posições x_1 e x_2 distintas.

[9] Eventos físicos que ocorrem em locais distintos no espaço-tempo.

[10] *Gedanken experiment* em alemão ou *thought experiment* em Inglês, segundo EISBERG & RESNICK (PP835).

[11] KRAUS & CARVER (PP721).

Tabela 1 – Equações das transformações 3D de coordenadas entre os sistemas de referência S em repouso e S’ em movimento na direção do eixo x.

Transformação 3D de Lorentz	
Sistema S’ para S	**Sistema S para S’**
$x = \gamma(x'+vt')$	$x' = \gamma(x - vt)$
$y = y'$	$y' = y$
$z = z'$	$z' = z$
$t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x')$	$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x)$

Assim, as dimensões observadas **x** e **x’** em cada sistema passaram a ser corrigidas por um fator adimensional γ de correção relativística[12] proporcional à velocidade relativa **v** entre os sistemas móvel e fixo, dado por:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (10)$$

Aonde:

v: é a velocidade constante do sistema em movimento (referencial S’x’y’z’)

em relação ao fixo (referencial Sxyz).

c: é a velocidade limite de um sistema (partícula) em movimento.

Quanto aos efeitos sobre a massa e a energia dos sistemas (partículas) em movimento, isso também foi objeto de estudo da teoria da Relatividade e resultou na *Mecânica Relativística*. Esta última explorou os conceitos de *massa de repouso* e *massa relativística* bem como estabeleceu um novo princípio, o de conservação da *energia relativística total* em sistemas isolados.

[12] EINSTEIN (1905).

Unificando os conceitos

As equações desenvolvidas pelos físicos buscam atingir uma unidade ao representar os fenômenos da natureza, ou seja, elas não devem sofrer grandes mudanças, por exemplo, quando “migramos” de um sistema de referência fixo para outro móvel, nem quando saímos das micro-dimensões para as macro-dimensões[13].

Dentro de um princípio de equivalência é aceito que as equações-postulados de De Broglie e de Einstein devem permanecer as mesmas tanto para macro quanto para micro-sistemas, apesar de não sermos necessariamente capazes de observar os efeitos ou fenômenos da natureza quântica em macro-sistemas.

Da mesma forma, a dualidade onda-partícula também permanece válida para micro ou macro-sistemas, a despeito de nossas incapacidades observacionais.

Embora seja difícil afirmar que uma correlação entre a quântica e a relatividade[14], aparentemente desconexas em seus princípios científicos, converta-se em um novo paradigma, senão por deficiências: observacional, experimental ou tecnológica, pelo menos em termos teóricos será exatamente o propósito deste trabalho.

Esta proposta de um novo paradigma parte do princípio de equivalência entre macro e micro sistemas e baseia-se na idéia de que “*a natureza é uma só*”, ou seja, que ela existe fenomenologicamente em um *continuum* entre micro e macro dimensões espaço-temporais. Portanto, partindo das funções de onda associadas ao movimento de uma partícula livre, após algumas modificações e estendendo os limites de velocidade da teoria quântica aos domínios relativísticos, acreditamos ter atingindo a *unificação* das duas teorias (quântica e relativística), como será demonstrado à seguir.

---

[13] Essa afirmação é dentro de um contexto puramente mecanicista ou cinemático. Logicamente há diversos efeitos que são potencializados no mundo micro em relação ao macro e vice-versa, existindo sim, diferenças fenomenológicas. Um exemplo são os efeitos da própria microgravidade quando comparados com os da macrogravidade.

[14] Ver nossas considerações iniciais sobre a Quântica e sobre a Relatividade.

MODIFICANDO E COMPREENDENDO AS FUNÇÕES DE ONDA

As equações (2), (3) e (4) combinadas nas funções de ondas associadas a uma partícula com movimento unidimensional e velocidade **v** constante, podem ser resumidas como:

$$\Psi = \cos\theta + i.\mathrm{sen}\theta \tag{11}$$

$$\Psi^* = \cos\theta - i.\mathrm{sen}\theta \tag{12}$$

Lembrando que na relatividade, a relação entre a velocidade do movimento unidimensional de um corpo ou partícula se movendo com velocidade constante **v** e o limite das velocidades, ou seja **c**, é uma razão atribuída a uma tangente trigonométrica de um ângulo, geralmente associado aos eixos espaço-tempo S e S’ entre os sistemas referenciais fixo e móvel adotados no estudo do movimento, temos:

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{v}{c} \tag{13}$$

Desta forma, as equações (11) e (12) ficam:

$$\Psi = \cos\theta \cdot (1 + i.\tan\theta) = \cos\theta \cdot (1 + i \cdot \frac{v}{c}) \tag{14}$$

$$\Psi^* = \cos\theta \cdot (1 - i.\tan\theta) = \cos\theta \cdot (1 - i \cdot \frac{v}{c}) \tag{15}$$

Portanto, com as modificações sugeridas, observa-se que as funções de onda são na realidade projeções de dois vetores espaço-temporais funções complexo-conjugados, dentro de um sistema referencial 3D ou 4D relativístico, a saber:

$$\psi_+ = (1 + i \cdot \frac{v}{c}) \tag{16}$$

$$\psi_+^* = (1 - i \cdot \frac{v}{c}) \tag{17}$$

E o produto entre os vetores funções complexo-conjugados será dado por:

$$\psi_+ \cdot \psi_+^* = (1 + i \cdot \frac{v}{c}) \cdot (1 - i \cdot \frac{v}{c}) = (1 - i^2 \cdot \frac{v^2}{c^2}) = (1 + \frac{v^2}{c^2}) \qquad (18)$$

As projeções dos vetores no sistema 3D relativístico

À partir da equação (16) e (17) substituindo nas equações (14) e (15) encontramos:

$$\Psi = \cos\theta \cdot \psi_+ \qquad (19)$$

$$\Psi^* = \cos\theta \cdot \psi_+^* \qquad (20)$$

E sabendo que o produto das funções de ondas deve ser unitário, conforme indicado na equação (9), juntando as equações (18), (19) e (20) temos:

$$\Psi \cdot \Psi^* = \cos^2\theta \cdot \psi_+ \cdot \psi_+^* = \cos^2\theta \cdot (1 + \frac{v^2}{c^2}) = 1 \qquad (21)$$

Logo, a equação (21) será satisfeita caso em um sistema relativístico referencial 3D tivermos:

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{v^2}{c^2})}} \qquad (22)$$

Com os conhecimentos das relações trigonométricas de funções circulares sabemos que a equação (22) é correta se a relação **tan θ** → **v/c** for válida.

As projeções dos vetores no sistema 4D relativístico

Por outro lado, se considerarmos um sistema relativístico referencial 4D, o eixo *ct* será trocado por um eixo *imaginário* (*ct.**i***) e as relações trigonométricas deverão ser substituídas por relações hiperbólicas, desta forma podemos reescrever a equação (22) como :

$$\cosh(\theta_i) = \frac{1}{\sqrt{(1+\frac{v^2}{c^2}i^2)}} \quad \text{ou} \quad \cosh(\theta_i) = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{v^2}{c^2})}} \qquad (23)$$

Se a relação **tanh(θi) → i.v/c** for válida, a equação (23) estará correta. O mesmo se aplica se efetuarmos a sua substituição na relação da equação (21):

$$\Psi \cdot \Psi^* = \cosh^2(\theta_i) \cdot \psi_+ \cdot \psi_+^* = \frac{(1+\frac{v^2}{c^2})}{(1-\frac{v^2}{c^2})} = 1 \qquad (24)$$

A relação da equação (24) é uma relação conhecida pelos estudiosos da relatividade nos diagramas de Minkowiski[15] como sendo a relação entre os comprimentos x'_0 e x_0 da mesma "norma" ou "comprimento-próprio" visto em cada sistema de referência S' e S. Então, eles podem ser considerados iguais e com relação de razão unitária, ou seja:

$$\frac{x'_0}{x_0} = \sqrt{\frac{1+\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1 \qquad (25)$$

As novas funções de onda:

Os vetores funções das equações (16) e (17) são complexo-conjugados e junto com os seus respectivos simétricos forneceram meios para que encontrássemos 4 funções de ondas especialmente "projetadas"[16], a saber:

---

[15] KRAUS & CARVER (PP719).

[16] Por simplificação de notação faremos:

$\Psi_K = \Psi_K(x,t)$, $\Psi_K^* = \Psi_K^*(x,t)$, $\Psi_{KK} = \Psi_{KK}(x,t)$ e $\Psi_{KK}^* = \Psi_{KK}^*(x,t)$

$$\Psi_K = \left(-i - i\frac{v}{c}\right) \tag{26}$$

$$\Psi_K^* = \left(i - i\frac{v}{c}\right) \tag{27}$$

$$\Psi_{KK} = \left(-i + i\frac{v}{c}\right) \tag{28}$$

$$\Psi_{KK}^* = \left(i + i\frac{v}{c}\right) \tag{29}$$

Essas 4 funções projetadas nos permitiram encontrar o equacionamento de unificação das teorias quântica e relativística, através do estudo do movimento unidimensional de uma partícula livre, conforme veremos adiante.

A localização das funções

As 4 novas funções obtidas à partir do nosso estudo do movimento unidimensional de uma partícula livre podem ser localizadas sobre um sistema de coordenadas baseado em dois e não apenas um eixo imaginário, ou seja, um plano bi-complexo ortogonal e perpendicular a um eixo real.

A este espaço demos o nome de Espaço Tri-ortogonal Bi-complexo e nele as 4 funções de ondas ficam como mostrado na Figura 1.

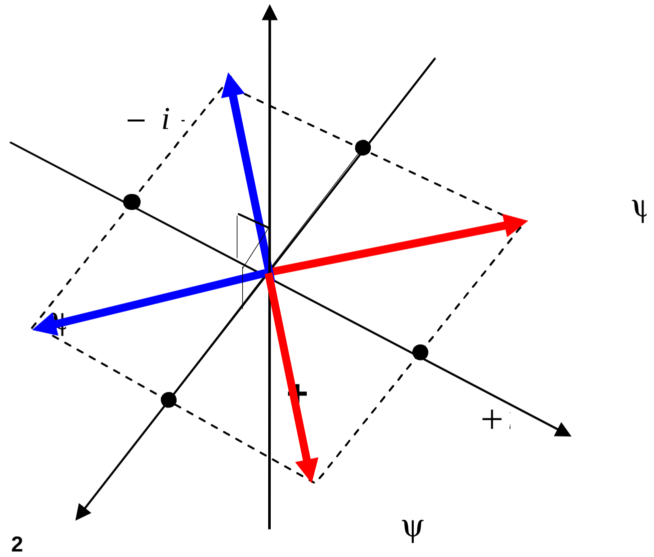

Figura 1. As 4 funções e suas respectivas localizações em um Espaço Tri-ortonogonal Bi-complexo, sendo I_1 e I_2 os eixos imaginários e R o eixo real.

O ENFOQUE QUÂNTICO

Aplicando cada uma das funções à equação (1) de Schroedinger obtemos as soluções mostradas na tabela 2. Essas funções são baseadas no movimento unidimensional de uma partícula livre com velocidade constante dada pela relação **v**= x/t.

Geralmente, ao se solucionar a equação de Schroedinger obtêm-se um Potencial escalar, real e constante chamado de V(x,t).

Entretanto, as novas soluções indicam que os Potenciais encontrados são energias, porém de natureza complexa.

Tabela 2 – Potenciais complexos V(x,t) encontrados com as funções de onda aplicadas na equação de Schroedinger.

Funções de Onda	**Potenciais Complexos**
$\Psi_K = -i \cdot \left(1 + \frac{x}{ct}\right)$	$V(x,t) = \frac{i.\hbar x}{t(ct + x)}$
$\Psi_K^* = +i \cdot \left(1 - \frac{x}{ct}\right)$	$V(x,t) = \frac{i.\hbar x}{t(ct - x)}$
$\Psi_{KK} = -i \cdot \left(1 - \frac{x}{ct}\right)$	$V(x,t) = \frac{-i.\hbar x}{t(ct - x)}$
$\Psi_{KK}^* = +i \cdot \left(1 + \frac{x}{ct}\right)$	$V(x,t) = \frac{-i.\hbar x}{t(ct + x)}$

Além disso, uma das condições iniciais da quântica é que as possíveis soluções da equação de Schroedinger também satisfaçam a relação de conservação da energia total E, dada por:

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x,t) \tag{30}$$

onde:

p : é o momento linear da partícula livre.

A primeira parcela da soma da equação (30) é conhecida como energia cinética da partícula, sendo esta uma quantia real dada por:

$$K(v) = \frac{p^2}{2m} \tag{31}$$

Desta forma, podendo o potencial V(x,t) ser uma quantia complexa, concluímos que a energia total E também pode ser complexa.

O ENFOQUE RELATIVÍSTICO

Até hoje, dentro da visão quântica, o produto de funções complexo-conjugadas do tipo $\Psi\ \Psi^*$ deve ser unitário, conforme visto nas equações (5), (9), (21) e (24).

Com as 4 novas funções propostas podemos gerar até 6 produtos, já que elas são todas funções complexo-conjugadas entre si, como mostrado a seguir:

1º. Produto $\Psi_K . \Psi_K^*$

$$\Psi_K \cdot \Psi_K^* = \left(-i - i\frac{v}{c}\right) \cdot \left(i - i\frac{v}{c}\right)$$

$$\Psi_K \cdot \Psi_K^* = -i^2 + \frac{v}{c}i^2 - \frac{v}{c}i^2 - \frac{v^2}{c^2}$$

$$\Psi_K \cdot \Psi_K^* = 1 - \frac{v^2}{c^2} \tag{32}$$

2º. Produto $\Psi_{KK} . \Psi_{KK}^*$

$$\Psi_{KK} \cdot \Psi_{KK}^* = \left(-i + i\frac{v}{c}\right) \cdot \left(i + i\frac{v}{c}\right)$$

$$\Psi_{KK} \cdot \Psi_{KK}^* = 1 + \frac{v}{c} - \frac{v}{c} - \frac{v^2}{c^2}$$

$$\Psi_{KK} \cdot \Psi_{KK}^* = 1 - \frac{v^2}{c^2} \tag{33}$$

Observe que o resultado dos produtos das funções acima apresentados nas equações (32) e (33) são todos iguais, apesar de serem produtos de pares de funções distintas. Comparando esses resultados com a equação (10) notamos que aí surge a correlação entre as funções quânticas e o fator de correção relativística γ, como será mostrado na tabela 3. Por enquanto, vamos continuar demonstrando os outros produtos com as funções restantes.

3º. Produto $\Psi_K . \Psi_{KK}$

$$\Psi_K \cdot \Psi_{KK} = \left(-i - i\frac{v}{c}\right)\cdot\left(-i + i\frac{v}{c}\right)$$

$$\Psi_K \cdot \Psi_{KK} = -1 + \frac{v}{c} - \frac{v}{c} + \frac{v^2}{c^2}$$

$$\Psi_K \cdot \Psi_{KK} = -1 + \frac{v^2}{c^2} \tag{34}$$

4º. Produto $\Psi_K^* \cdot \Psi_{KK}^*$

$$\Psi_K^* \cdot \Psi_{KK}^* = \left(+i - i\frac{v}{c}\right)\cdot\left(i + i\frac{v}{c}\right)$$

$$\Psi_K^* \cdot \Psi_{KK}^* = -1 - \frac{v}{c} + \frac{v}{c} + \frac{v^2}{c^2}$$

$$\Psi_K^* \cdot \Psi_{KK}^* = -1 + \frac{v^2}{c^2} \tag{35}$$

5º. Produto $\Psi_K \cdot \Psi_{KK}^*$

$$\Psi_K \cdot \Psi_{KK}^* = \left(-i - i\frac{v}{c}\right)\cdot\left(i + i\frac{v}{c}\right)$$

$$\Psi_K \cdot \Psi_{KK}^* = 1 + \frac{v}{c} + \frac{v}{c} + \frac{v^2}{c^2}$$

$$\Psi_K \cdot \Psi_{KK}^* = \left(1 + \frac{v}{c}\right)^2 \tag{36}$$

6º. Produto $\Psi_K^* \cdot \Psi_{KK}$

$$\Psi_K^* \cdot \Psi_{KK} = \left(+i - i\frac{v}{c}\right)\cdot\left(-i + i\frac{v}{c}\right)$$

$$\Psi_K^* \cdot \Psi_{KK} = 1 - \frac{v}{c} - \frac{v}{c} + \frac{v^2}{c^2}$$

$$\Psi_K^* \cdot \Psi_{KK} = \left(1 - \frac{v}{c}\right)^2 \tag{37}$$

Finalmente, podemos resumir o resultado dos produtos em função do fator de correção relativístico $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$, como na Tabela 3.

Tabela 3 – Os resultados dos produtos em função do fator relativístico γ.

	Resultado dos produtos	**Resultados do produtos em função de γ**
1º. Produto	$\Psi_K \cdot \Psi_K^* = 1 - \dfrac{v^2}{c^2}$	$\Psi_K \cdot \Psi_K^* = +\dfrac{1}{\gamma^2}$
2º. Produto	$\Psi_{KK} \cdot \Psi_{KK}^* = 1 - \dfrac{v^2}{c^2}$	$\Psi_{KK} \cdot \Psi_{KK}^* = +\dfrac{1}{\gamma^2}$
3º. Produto	$\Psi_K \cdot \Psi_{KK} = -1 + \dfrac{v^2}{c^2}$	$\Psi_K \cdot \Psi_{KK} = -\dfrac{1}{\gamma^2}$
4º. Produto	$\Psi_K^* \cdot \Psi_{KK}^* = -1 + \dfrac{v^2}{c^2}$	$\Psi_K^* \cdot \Psi_{KK}^* = -\dfrac{1}{\gamma^2}$
5º. Produto	$\Psi_K \cdot \Psi_{KK}^* = \left(1 + \dfrac{v}{c}\right)^2$	$\Psi_K \cdot \Psi_{KK}^* = \left(1 + \dfrac{v}{c}\right)^2$
6º. Produto	$\Psi_K^* \cdot \Psi_{KK} = \left(1 - \dfrac{v}{c}\right)^2$	$\Psi_K^* \cdot \Psi_{KK} = \left(1 - \dfrac{v}{c}\right)^2$

Desta forma, fica evidenciado que a relatividade poder ser correlacionada com as novas funções quânticas e que os nossos 6 produtos geram a unicidade prevista em baixas velocidades. Aparentemente, isso está bem caracterizado para os 1º.e 2º. Produtos, pois são funções simétricas em relação ao eixo imaginário I_1. Porém, apesar do sinal negativo, também vale para os 3º.e 4º. Produtos que são simétricos em relação ao eixo imaginário I_2, conforme visto na figura 1.

O fato dos 3º.e 4º. Produtos apresentarem um sinal negativo é uma novidade ainda a ser mais bem compreendida, a simetria ocorre em relação ao eixo I_2 que foi especialmente criado para gerar o plano bi-complexo neste estudo.

Já os 5º.e 6º. Produtos apenas se mostrarão correlacionados com o fator γ quando multiplicados entre si, por serem simétricos em relação à origem (ver a figura 1) e conforme mostrados na Tabela 4.

Tabela 4 – Propriedade comutativa entre os produtos das 4 novas funções.

1º. Produto X **2º. Produto**	
$\left(\Psi_K.\Psi_K^*\right)\cdot\left(\Psi_{KK}.\Psi_{KK}^*\right)=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2$ Ou $\left(\Psi_K.\Psi_K^*\right)\cdot\left(\Psi_{KK}.\Psi_{KK}^*\right)=\frac{1}{\gamma^4}$	
3º. Produto X **4º. Produto**	**5º. Produto** X **6º. Produto**
$\left(\Psi_K.\Psi_{KK}\right).\left(\Psi_K^*.\Psi_{KK}^*\right)=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2$ ou $\left(\Psi_K.\Psi_{KK}\right).\left(\Psi_K^*.\Psi_{KK}^*\right)=\frac{1}{\gamma^4}$	$\left(\Psi_K.\Psi_{KK}\right).\left(\Psi_K^*.\Psi_{KK}^*\right)=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2$ ou $\left(\Psi_K.\Psi_{KK}\right).\left(\Psi_K^*.\Psi_{KK}^*\right)=\frac{1}{\gamma^4}$

Note que o produto de todas elas fornece sempre o inverso da quarta potência do fator γ, isso era de se esperar, pois trabalhamos com eixos complexos. Logo, essas funções se comportam como soluções de uma equação de 4º.Grau[17], ou seja, são como raízes reais ou complexas aos pares (conjugadas) quando a velocidade **v** tende ao limite **c**:

[17] De acordo com as relações de Girard, um polinômio de grau maior que 2 pode ser fatorado em suas raízes. O produto delas é igual ao termo independente do polinômio com o sinal igual a $(-1)^{grau}$.

$$\frac{1}{\gamma^4} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2 = 1 - 2\frac{v^2}{c^2} + \frac{v^4}{c^4} \qquad (38)$$

A EQUAÇÃO DE UNIFICAÇÃO ENTRE A QUÂNTICA E A RELATIVIDADE

O 1º. e o 2º. Produtos, simétricos em relação ao eixo imaginário I_1, são especiais, pois eles naturalmente geram a relação que unifica as teorias quântica e relativística.

Note que não importa se o produto ocorre entre $\Psi_K \cdot \Psi_K^*$ ou entre $\Psi_{KK} \cdot \Psi_{KK}^*$, a equação é sempre a mesma, assim, à partir da tabela 3, podemos escrever :

$$\Psi_K \cdot \Psi_K^* = 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2} \qquad (39)$$

Acreditamos que a relação fornecida pela equação (39) possa ser extrapolada para outros pares de funções soluções, que sejam complexo-conjugados entre si.

Então, reescrevendo genericamente a equação (39), obtemos a equação unificadora abaixo:

$$\underbrace{\Psi.\Psi^*}_{\text{Fator Quântico}} \; . \; \underbrace{\gamma^2}_{\text{Fator Relativístico}} = 1 \qquad (40)$$

Nesta equação, observamos os fatores Quântico (probabilístico) e Relativístico (determinista) correlacionados por meio de um produto cujo resultado é a unidade. Esse produto pode ser interpretado graficamente através de uma *hipérbole*, tal qual a Figura 2.

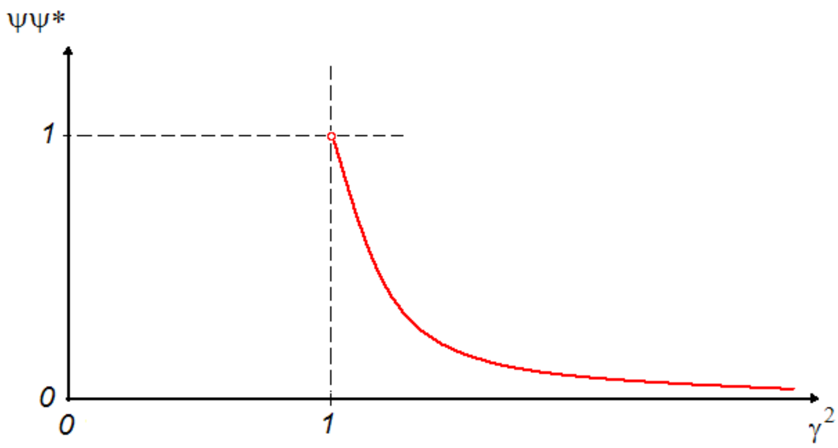

Figura 2. A hipérbole quantum-relativística.

O Fator Quântico que é probabilístico, apresenta valores entre 0 e 1, já o Fator Relativístico que é determinístico, apresenta valores entre 1 e ∞ (infinito), conforme a velocidade **v** da onda-partícula.

Assim, quando a velocidade (v) de uma onda-partícula se aproxima da velocidade limite de propagação (c), ou seja **v/c** → 1, o Fator quântico[18] tende a zero, enquanto que o Fator Relativístico tende ao infinito. Por outro lado, quando a velocidade (v) da partícula tende a um valor muito baixo, ou seja **v/c** → 0, o Fator quântico tende a 1, enquanto que o Fator Relativístico também tende a 1, como observamos na Figura 3.

[18] Que está relacionada à probabilidade de se localizar uma partícula associda a uma onda.

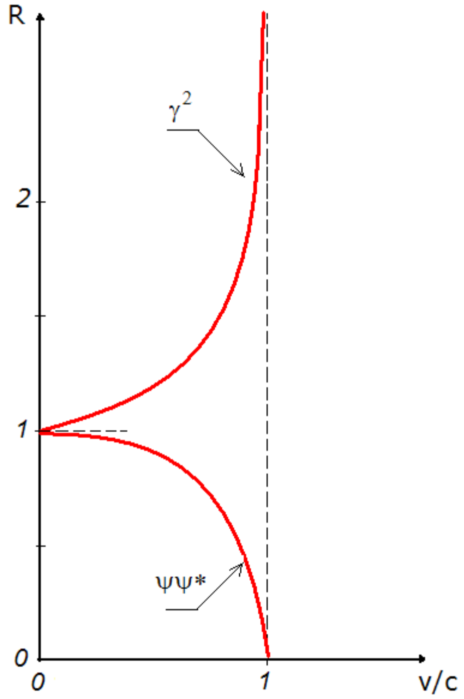

Figura 3. A relação entre os fatores e a velocidade da onda.

De uma maneira simples, podemos dizer que:

- quanto mais baixa for a velocidade v, maior será a probabilidade de localização da partícula e menores serão as suas características relativísticas;
- quanto maior for a velocidade v, menor será a probabilidade de localizar a partícula e maiores serão as suas características relativísticas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acreditamos que este trabalho cumpriu a sua meta em apresentar uma possível unificação entre as teorias Quântica e Relativística, pelo menos, em uma primeira abordagem unidimensional e estritamente teórica.

Essa unificação partiu do princípio de equivalência entre macro e micro sistemas, baseando-se na idéia de que "*a natureza é uma só*" e que fenomenologicamente a mesma deva existir em um *continuum* entre as dimensões espaço-temporais. Isto fez com que a partir de algumas modificações matemáticas nas funções de onda, percebêssemos o caráter hiperbólico inerente ao produto entre fatores por nós identificados e denominados como quântico e relativístico.

O produto entre esses fatores preserva a *Unicidade* fenomenológica da natureza, através da correta compreensão e junção das visões: *Probabilista* e *Determinista*.

Pelo menos, podemos imaginar que ocorre uma quebra de velhos conceitos quando a *Unicidade* evidencia a compatibilidade e complementaridade das, até então ditas desconexas, características de efeitos probabilísticos e determinísticos da natureza.

Há ainda muito a ser feito em termos de experimentos e desenvolvimentos, porém, com tranquilidade podemos prever que alguns resultados experimentais, no futuro, poderão ser mais bem interpretados à partir da nova visão apresentada neste trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

EINSTEIN, A., **Zur Elektrodynamik bewegter Körper.** Annalen der Physik. Adp.17 pp 891-921, 1905. disponível no site http://www.physik.uni-augsburg.de/annalen/history/Einstein-in-AdP.htm acessado em ABR 09.

EISBERG, Robert & RESNICK, Robert. **Física Quântica**. 14ed. – Rio de Janeiro: Campus, 1988.

KRAUS, J. D. & CARVER, K. R. **Eletromagnetismo**. 2ed. – Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1978.

SCHROEDINGER, Erwin (December 1926). **“An Ondulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules”**. Phys. Rev. 28 (6):1049-1070.