FILTRAGEM ADAPTATIVA DE SINAIS

Adaptive Filtering of Signals

Mário ULIANI NETO
Faculdade de Jaguariúna
Faculdade Politécnica de Campinas
Fundação CPqD

Leandro de Campos Teixeira GOMES
Fundação CPqD

Resumo: Métodos tradicionais de filtragem adaptativa supervisionada utilizam sequências de treinamento como sinal de referência. Em um cenário de comunicação, este paradigma consiste em interromper periodicamente a transmissão de informação para transmitir uma sequência de treinamento. Os coeficientes do filtro adaptativo são ajustados através da comparação de sua saída com a sequência de treinamento, obtendo-se assim os coeficientes ótimos do filtro. Neste trabalho, são apresentados uma revisão bibliográfica acerca da filtragem adaptativa e resultados de simulação para ilustrar o método e demonstrar sua viabilidade.
Palavras-chave: filtro; filtragem adaptativa; critério de Wiener.

Abstract: Traditional supervised adaptive filtering techniques use training sequences as a reference signal. In a communication scenery, this paradigm consists of periodically interrupting the transmission of information to send a training sequence. Adaptive filter coefficients are adjusted by comparing the filter's output and the training sequence, in order to get the optimum filter coefficients. In this work, a bibliographic revision is presented, as well as simulation results that illustrate the method and demonstrate its viability.
Keywords: filter; adaptive filtering; Wiener criterion.

INTRODUÇÃO

O homem demonstra ao longo de sua história a necessidade de interagir através da troca de mensagens. Existem hoje diferentes sistemas de comunicação; todos, porém, apresentam três elementos básicos, partindo de um elemento responsável pelo envio da mensagem (transmissor) até aquele que recebe a informação (receptor). Independentemente do mecanismo empregado para trafegar a informação, a separação física entre eles torna inevitável a existência de um canal de comunicação, que pode ocasionar modificações no sinal transmitido e até mesmo tornar a comunicação impraticável.

Para evitar que a comunicação seja impraticável, é necessário que o projetista crie contramedidas que atenuem ou cancelem os efeitos de um canal em um sistema de comunicação, em busca de níveis apropriados de qualidade para transmissão de informação. Neste trabalho será apresentada uma técnica que viabiliza contramedidas baseadas na análise e processamento de sinais e com foco em soluções adaptativas, capaz de se adaptar ao longo do tempo.

Um filtro pode ser definido como um dispositivo que atua em um conjunto de dados, visando a extração de informação relevante (Haykin, 2001). Na abordagem estatística para a solução do problema de filtragem, assume-se a disponibilidade de certos parâmetros estatísticos do sinal de informação (e.g. média e correlação) e utiliza-se esses parâmetros para projetar um filtro de acordo com um critério estabelecido, geralmente valendo-se de técnicas de otimização. Uma abordagem comumente empregada no problema de filtragem é a minimização do valor quadrático médio de um sinal de erro, definido como a diferença entre a resposta desejada e a saída atual do filtro.

O desenvolvimento de um filtro adaptativo requer informações estatísticas prévias dos dados que serão processados. O filtro é considerado ótimo apenas quando as características estatísticas dos dados de entrada se igualam à informação prévia na qual o desenvolvimento do filtro está baseado. Para tal desenvolvimento, é necessário inicialmente estimar os parâmetros estatísticos relevantes dos sinais conhecido previamente e na entrada do filtro, e então igualar os resultados obtidos, utilizando uma formulação não-recursiva, para cálculo dos parâmetros do filtro. Entretanto, em aplicações que trabalham em tempo real, este processo não-recursivo apresenta algumas desvantagens, podendo ser excessivamente elaborado e computacionalmente custoso (Haykin, 2001).

Um método mais eficiente para otimização no processo de filtragem é o uso de um *filtro adaptativo*, que possibilita um ajuste dos parâmetros do filtro sem o completo conhecimento prévio das características relevantes do sinal. O algoritmo é inicializado em condições pré-determinadas e, através de um processo iterativo, converge para a melhor solução, segundo o critério estabelecido. Na literatura, existe uma grande variedade de algoritmos para a otimização de filtros adaptativos; a escolha do algoritmo mais adequado para um sistema depende de diversos fatores, e.g. custo computacional.

ESTRUTURAS DE FILTRAGEM

Todo sistema capaz de modificar certas componentes de freqüência de um sinal, caracterizado por um mapeamento entre as variáveis de entrada e as de saída, é chamado de filtro. A Figura 1 ilustra essa definição.

Figura 1. Esquema de um filtro.

Existem duas classes fundamentais de filtros, associadas às respectivas estruturas de implementação. As *estruturas lineares* (Haykin e Veen, 2001; Lathi, 2007), cuja resposta a uma combinação linear de entradas é a combinação linear das respostas a cada entrada, e as *estruturas não-lineares* (Bazaraa, Sherali e Shetty, 1993), cujo mapeamento não obedece a este princípio, dito de superposição.

Sistemas lineares obedecem a duas relações fundamentais:

$$y(n) = w(n) * x(n) \qquad (1)$$

onde n corresponde ao índice temporal discreto, $w(n)$ representa a resposta impulsiva do filtro, $x(n)$ o sinal de entrada e $y(n)$ representa o sinal de saída, e:

$$Y(z) = W(z) * X(z) \qquad (2)$$

sendo $W(z)$ a função de transferência do filtro, $X(z)$ a transformada z do sinal de entrada e $Y(z)$ a transformada z do sinal de saída.

Filtros lineares podem ser de resposta impulsiva finita (FIR) (Haykin e Veen, 2001) ou de resposta impulsiva infinita (IIR) (Haykin e Veen, 2001). Um filtro FIR pode ser implementado como uma combinação linear das amostras de entrada com diferentes atrasos e ponderações. Neste caso, a saída do filtro FIR de ordem N pode ser escrita como:

$$\mathrm{y(n)} = \sum_{k=0}^{N-1} w(k)x(n-k) = \mathbf{w}^T\mathbf{x}(n) = [w_0 \quad w_1 \quad \cdots \quad w_{N-1}] \cdot \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-N+1) \end{bmatrix} \qquad (3)$$

CRITÉRIO DE WIENER: FILTRAGEM A PARTIR DE UMA MEDIDA DE ERRO

Uma maneira de se obter uma função custo capaz de reverter distorções em um sinal é realizar uma comparação entre a saída do filtro e um sinal desejado conhecido[1] (aquilo que se esperaria da saída do filtro num caso favorável, conseguido com a presença de um sinal piloto). Este modelo de filtragem, associado ao paradigma de Wiener, é ilustrado na Figura 2.

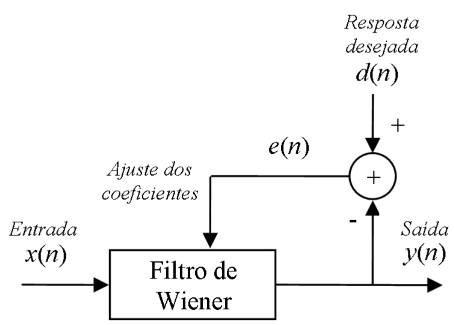

Figura 2. Filtro de Wiener.

A idéia do método consiste em inserir amostras de um processo estocástico $x(n)$ em um filtro com vetor de parâmetros $\mathbf{w}$, produzindo um sinal de saída $y(n)$ tão próximo quanto possível de um sinal desejado $d(n)$, sendo

[1] A existência de um sinal piloto (sinal conhecido aplicado à entrada do canal) caracteriza uma técnica supervisionada.

que a diferença entre os sinais dá origem a um erro de estimação $e(n)$. O objetivo do ajuste do filtro é projetar um dispositivo capaz de modificar o sinal $x(n)$ de modo a se ter uma saída semelhante a um modelo de sinal conhecido previamente. O grande desafio é, então, reduzir o erro de estimação a um mínimo.

Uma medida muito comum e efetiva, capaz de tratar indiferentemente erros positivos e negativos e levar em consideração uma minimização no sentido da média e não apenas valores instantâneos, é o erro quadrático médio (EQM) (Haykin, 2001). A função custo correspondente, que expressa o critério de Wiener, é definida como[2]:

$$J = E\left[e(n)e^{*}(n)\right] = E\left[\left|e(n)\right|^{2}\right] \qquad (4)$$

onde E denota o operador estatístico de esperança, * indica complexo conjugado e o sinal de erro $e(n)$ é definido pela diferença:

$$e(n) = d(n) - y(n) \qquad (5)$$

A saída do filtro é definida como uma convolução linear:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{q} w_k^{*} x(n-k) \qquad (6)$$

onde $q+1$ é o número de coeficientes do filtro linear.

Substituindo 5 e 6 em 4, aplicando o operador gradiente e após algumas manipulações, tem-se:

$$\sum_{i=0}^{q} w_{oi} E\left[x(n-k)x^{*}(n-i)\right] = E\left[x(n-k)d^{*}(n)\right], \qquad k = 0,1,2,\cdots,q \qquad (7)$$

---

2 A nomenclatura utilizada nesta seção supõe sinais complexos.

onde w_{oi} é o *k*-ésimo coeficiente na resposta impulsiva do filtro ótimo segundo o critério do erro quadrático médio. O termo $E[x(n-k)x^*(n-i)] = r(i-k)$ é a função de autocorrelação (Papoulis, 1991) na entrada do filtro para um atraso $i-k$. O termo $E[x(n-k)d^*(n)] = p(-k)$ é a correlação cruzada entre a entrada do filtro e a resposta desejada para um atraso $-k$. Assim, a equação 7 pode ser reescrita como:

$$\sum_{i=0}^{q} w_{oi} r(i-k) = p(-k), \qquad k = 0,1,2,\cdots,q \tag{8}$$

Este sistema de equações pode ser reescrito na forma matricial:

$$\mathbf{R}\mathbf{w}_o = \mathbf{p} \tag{9}$$

onde $\mathbf{R} = E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^*(n)]$ e $\mathbf{p} = E[\mathbf{x}(n)d^*(n)]$, sendo $\mathbf{x}(n)$ definido como um vetor de dimensão $M \times 1$, onde M representa o número de coeficientes do filtro.

Os coeficientes ótimos $\mathbf{w}_o$ do filtro são obtidos pela inversão da matriz de correlação:

$$\mathbf{w}_o = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p} \tag{10}$$

Partindo das equações 4, 5 e 6 e, após diversas manipulações, chega-se à expressão geral para a função custo do critério de Wiener:

$$J(\mathbf{w}) = \sigma_d^2 - \mathbf{w}^*\mathbf{p} - \mathbf{p}^*\mathbf{w} + \mathbf{w}^*\mathbf{R}^{-1}\mathbf{w} \tag{11}$$

onde σ_d expressa a variância do sinal $d(n)$. A função custo de Wiener é quadrática e tem a forma de uma parabolóide. Esta parabolóide é caracterizada por um único ponto de mínimo, que representa o valor ótimo do filtro de Wiener, demonstrando que a expressão é *unimodal*. A Figura 3 apresenta uma típica função custo de Wiener.

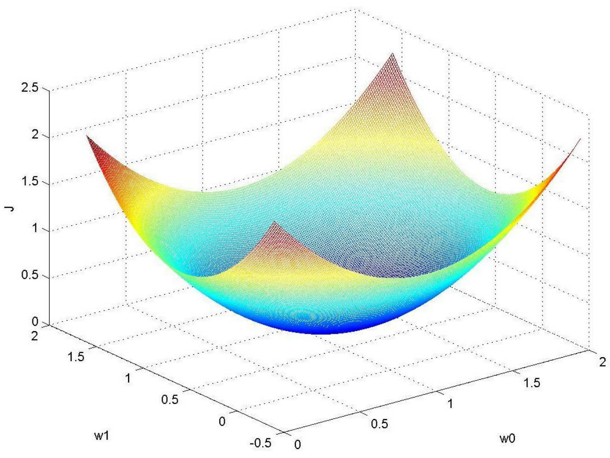

Figura 3. Típica função custo de Wiener.

ALGORITMO DO GRADIENTE DETERMINÍSTICO

O método de adaptação baseado no gradiente emprega uma técnica clássica de otimização conhecida como *steepest descent* (Haykin, 2001). Partindo do fato de que um novo valor da função J pode ser obtido a partir do seu comportamento no ponto $\mathbf{w}(n)$ através de uma expansão em série de Taylor (Papoulis, 1991), o método *steepest descent* corresponde a truncar-se esta expansão na derivada de primeira ordem, ou seja, no cálculo do gradiente da função. Intuitivamente, percebe-se que, ao caminhar no sentido contrário ao de maior crescimento do gradiente da função, através de sucessivas correções, é possível buscar um ponto de mínimo, pois trata-se da descida com maior declividade na curva da função custo. Assim, dada uma função custo $J(n)$, a atualização do vetor de parâmetros $\mathbf{w}$ pode ser expressa como:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu\left[-\nabla J(n)\right] \qquad (12)$$

onde μ é denominado *passo de adaptação* e controla o tamanho do passo dado a cada iteração, e $\nabla J(n)$ é o gradiente da função $J(n)$.

Para utilizar este método na busca de um valor que otimiza a função custo de Wiener, faz-se necessário calcular o vetor gradiente de tal função. Aplicando o operador gradiente à equação 11 e substituindo em 12, obtem-se a expressão final para o algoritmo do gradiente determinístico:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu\left[\mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{w}(n)\right] \qquad (13)$$

O algoritmo 13 apresenta um único ponto de mínimo para convergência, que corresponde à solução de Wiener. Apesar do algoritmo ser iterativo, pressupõe-se o conhecimento da matriz de autocorrelação $\mathbf{R}$ e do vetor de correlação cruzada $\mathbf{p}$, cujos valores devem ser previamente estimados.

SIMULAÇÕES

Supondo um sinal $s(n)$, formado por amostras independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) +1 e -1, seja transmitido por um canal com vetor de coeficientes $\mathbf{h} = [1 \quad 1.5]$. Deseja-se projetar um filtro equalizador adaptativo com dois coeficientes através do paradigma de Wiener que melhor reverta as dirtoções impostas pelo canal de comunicação, conforme ilustrado na Figura 4.

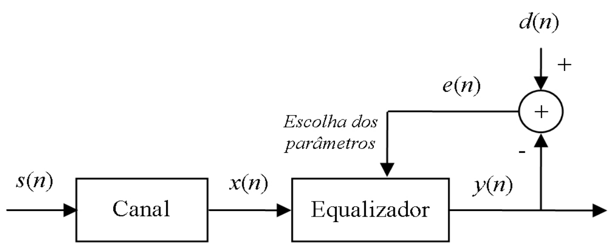

Figura 4. Modelo de comunicação.

Foram geradas 2000 amostras do sinal recebido $x(n)$ e empregado o algoritmo *steepest descent* para cálculo do filtro equalizador ótimo. Utilizou-se um passo de adaptação $\mu = 0{,}1$ e os coeficientes foram inicializados na origem ($\mathbf{w} = [0 \quad 0]$). A figura 5 apresenta a convergência do algoritmo no espaço de estados do filtro, tendo como pano de fundo as curvas de nível da função custo. Nota-se na figura que o algoritmo converge para o ponto de mínimo da função custo de Wiener, encontrando os parâmetros para o filtro equalizador adaptativo que melhor revertem as distorções impostas pelo canal de comunicação.

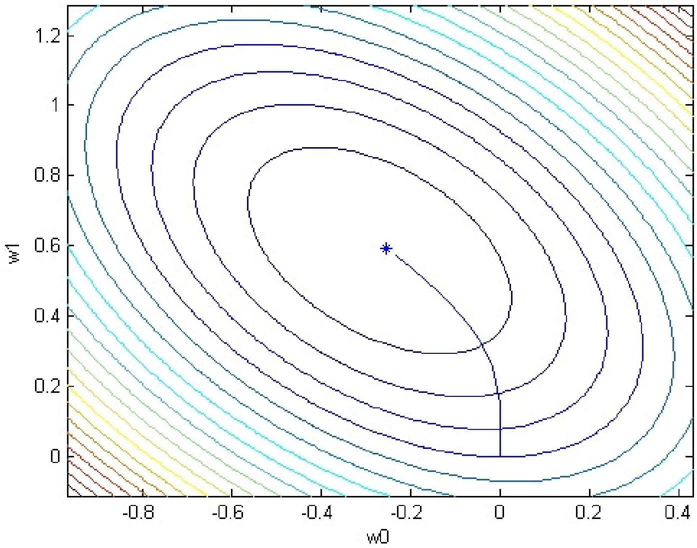

Figura 5. Comportamento do algoritmo *steepest descent*.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Métodos tradicionais de filtragem adaptativa supervisionada utilizam sequências de treinamento como sinal de referência. Em um cenário de comunicação, este paradigma consiste em interromper periodicamente a transmissão de informação para transmitir uma sequência de treinamento capaz de estimular os diversos aspectos da resposta do canal. Os coeficientes do filtro adaptativo são ajustados através da comparação de sua saída com a sequência de treinamento, obtendo-se assim os coeficientes ótimos do filtro segundo o critério estabelecido. Neste trabalho, foi apresentado o critério do EQM.

Simulações computacionais demonstraram que o algoritmo *steepest descent* foi capaz de obter, de forma recursiva, os parâmetros do filtro equalizador adaptativo que melhor revertem as distorções impostas pelo canal de comunicação.

O algoritmo *steepest descent* requer a estimativa da autocorrelação do sinal na entrada do filtro adaptativo. Acumular amostras do sinal pode ser dispendioso em termos de atraso para a comunicação. Dois algoritmo bem conhecidos na literatura, que levam em conta algumas aproximações, são o *Least Mean Square* (LMS) (Haykin, 2001) e *Recursive Least-Squares* (RLS) (Haykin, 2001). Uma alternativa para evitar-se o uso de sequências de treinamento é recorrer às técnicas de filtragem cega ou não-supervionada, que não contam com sinais de referência, baseando-se geralmente na análise de estatísticas de ordem superior do sinal (HAYKIN, 2000).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAZARAA, M.S.; SHERALI, H.D. e SHETTY, C.M. **Nonlinear Programming.** John Wiley, segunda edição, 1993.

HAYKIN, Simon. **Adaptive Filter Theory**. Prentice Hall, quarta edição, 2001.

HAYKIN, Simon e VEEN, Barry Van. **Sinais e Sistemas**. Companhia Editora Bookman, 2001.

HAYKIN, Simon. **Unsupervised Adaptive Filtering.** John Wiley & Sons, volume 4, 2000.

LATHI, B. P. **Sinais e Sistemas Lineares.** Bookman, segunda edição, 2007.

PAPOULIS, A. **Probability, Random Variables and Stochastic Processes**. McGraw Hill, terceira edição, 1991.